

2

TENSIONES

Introducción

El análisis del estado tensional en un punto constituye uno de los fundamentos esenciales de la teoría de la elasticidad. Todo sólido sometido a acciones exteriores desarrolla en su interior un sistema de fuerzas distribuidas que garantiza el equilibrio y la continuidad del material. Estas fuerzas internas, que actúan sobre planos imaginarios que atraviesan el sólido, se describen mediante el vector tensión, cuya formulación precisa permite caracterizar cómo se transmiten las cargas a escala local.

El objetivo de este capítulo es establecer de forma rigurosa la relación entre las fuerzas internas y la geometría del sólido, introduciendo el tensor de tensiones como herramienta matemática que describe completamente el estado

tensional en un punto. A partir de la deducción de la fórmula de Cauchy se muestra cómo el vector tensión asociado a cualquier plano puede obtenerse a partir de las tensiones definidas sobre tres planos mutuamente perpendiculares.

El capítulo desarrolla también las ecuaciones de equilibrio interno, que vinculan las tensiones con las fuerzas de volumen y garantizan la coherencia mecánica del campo tensional. De estas ecuaciones se deduce la simetría del tensor de tensiones, lo que reduce a seis el número de componentes independientes necesarias para describir el estado tensional.

Finalmente, se introducen las principales herramientas de interpretación física del estado de tensiones: las tensiones principales, las tensiones tangenciales máximas y las representaciones gráficas basadas en los círculos de Mohr. Estos conceptos permiten comprender la orientación de los planos más solicitados y constituyen la base para los criterios de fallo y los análisis avanzados de resistencia.

En conjunto, este capítulo proporciona los elementos necesarios para describir, calcular y representar el estado tensional en un sólido elástico, estableciendo un marco teórico indispensable para el estudio posterior de las deformaciones, las relaciones constitutivas y los criterios de resistencia.

2.1. Fuerzas sobre un sólido

Las fuerzas que pueden actuar sobre un sólido deformable (figura 2.1) pueden clasificarse, atendiendo a su dominio de aplicación, en fuerzas de contorno y fuerzas de volumen.

Fuerzas actuando sobre el contorno del sólido

Son fuerzas aplicadas sobre la frontera del sólido y pueden presentarse, desde un punto de vista geométrico, como:

- a) fuerzas puntuales, $\mathbf{F}_c$;
- b) distribuciones lineales de fuerzas (fuerzas por unidad de longitud), $\mathbf{q}_c$, y
- c) distribuciones superficiales de fuerzas (fuerzas por unidad de superficie), $\mathbf{p}_c$.

Fuerzas actuando en el interior del sólido

Son fuerzas que actúan en el interior del volumen del sólido y que pueden idealizarse, de forma general, como:

- a) fuerzas puntuales, $\mathbf{F}_i$;

- b) distribuciones lineales de fuerzas (fuerzas por unidad de longitud), q_i ;
- c) distribuciones superficiales de fuerzas (fuerzas por unidad de superficie), p_i , y
- d) distribuciones volumétricas de fuerzas (fuerzas por unidad de volumen o por unidad de masa), b .

De forma análoga, pueden aparecer *distribuciones equivalentes de momentos* asociadas a estas acciones.

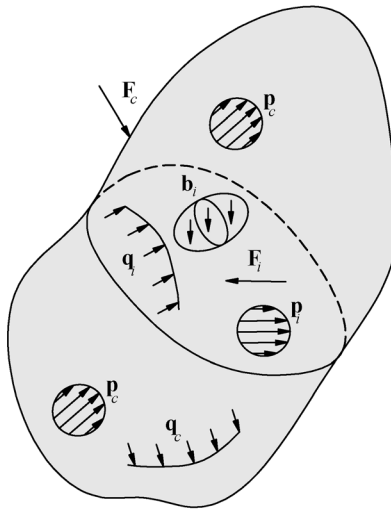


Figura 2.1. Fuerzas que pueden actuar sobre un sólido deformable.

En la mecánica de sólidos deformables clásica es habitual adoptar una descripción simplificada de las acciones externas, considerando exclusivamente dos tipos fundamentales de fuerzas:

- fuerzas por unidad de superficie que actúan sobre el contorno del sólido, y
- fuerzas por unidad de volumen que actúan en el interior del sólido.

Las distribuciones superficiales, lineales y puntuales de fuerzas aplicadas en el interior del sólido se interpretan como *idealizaciones límite* de fuerzas de volumen, que se obtienen cuando una, dos o tres de las dimensiones del volumen de aplicación tienden a cero.

En la teoría que se desarrolla en este texto no se consideran momentos por unidad de volumen, lo que corresponde al modelo de *continuo de Cauchy clásico*. En consecuencia, únicamente se tendrá en cuenta la actuación de:

- a) *Fuerzas por unidad de volumen*, que actúan en el interior del sólido,

descritas por el campo vectorial $\mathbf{b}(x, y, z)$. Este campo puede representar, entre otros, los siguientes casos particulares de interés práctico:

- el peso propio del sólido, debido a la acción del campo gravitatorio.
 - las fuerzas de inercia, asociadas a movimientos acelerados del sólido.
- b) *Fuerzas por unidad de superficie* que actúan en el contorno del sólido, descritas por el campo vectorial $\mathbf{t}(x, y, z)$. Este campo puede representar, entre otros, los siguientes casos particulares de interés práctico:
- presiones de contacto ejercidas por otros sólidos o por fluidos en reposo.
 - tracciones o compresiones superficiales debidas a acciones mecánicas aplicadas sobre el contorno del sólido, como esfuerzos transmitidos por apoyos, dispositivos de sujeción o uniones estructurales.

2.2. Vector tensión

2.2.1. Concepto de vector tensión

Se considera un cuerpo sólido (figura 2.2a) sobre el que actúan fuerzas interiores distribuidas por unidad de volumen y fuerzas exteriores aplicadas por unidad de superficie. Si del sólido completo (figura 2.2a) se aísla un segmento A (figura 2.2b), en su interior actuarán las fuerzas internas por unidad de volumen. En el contorno de A actuarán, por una parte, las fuerzas exteriores por unidad de superficie y, por otra, las fuerzas que aparecen en la interfaz con el resto del sólido, identificado como B .

Estas últimas corresponden a la acción que el segmento B ejerce sobre el segmento A y, por equilibrio, son iguales en módulo y dirección, y de sentido contrario, a las que ejerce A sobre B .

Las fuerzas que actúan sobre la superficie de contacto entre ambos segmentos son, en principio, desconocidas, a menos que se adopte una hipótesis inicial sobre su valor. No se trata de fuerzas aplicadas desde el exterior del sólido, sino de fuerzas internas, resultantes, a escala macroscópica, de las fuerzas intermoleculares que se oponen a la separación entre las moléculas del material. Si estas fuerzas superan determinados umbrales, pueden producirse separaciones definitivas, lo que macroscópicamente se traduce en fallos o roturas del material.

No obstante, desde el punto de vista de la formulación, y para el segmento aislado A , estas fuerzas internas tienen el mismo significado físico que las fuerzas externas por unidad de superficie aplicadas sobre el contorno del sólido. A estas fuerzas internas, que actúan entre distintas partes del sólido, así como a

las fuerzas exteriores aplicadas sobre su contorno, se las denomina *vector tensión* y se representan mediante el símbolo $\mathbf{t}$.

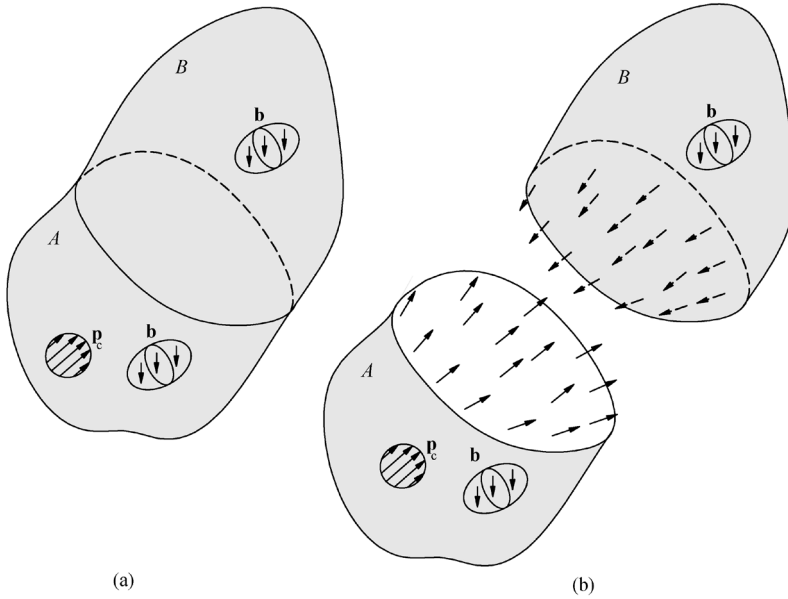


Figura 2.2. (a) Fuerzas que actúan sobre un sólido. (b) Vectores tensión en puntos de la superficie de contacto.

Al igual que ocurre en el contorno exterior del sólido, donde la superficie sobre la que actúan las fuerzas está perfectamente definida en cada punto, para caracterizar el vector tensión en un punto del interior del sólido es necesario especificar la superficie considerada. Sin embargo, esto no implica definir una región finita del dominio. Al considerar el límite en el que la superficie se reduce a un entorno infinitesimal del punto, dicha superficie queda completamente caracterizada por su plano tangente o, de forma equivalente, por el vector normal a dicho plano en el punto considerado.

Por tanto, es razonable asumir que el vector tensión queda completamente determinado por el punto del sólido considerado y por la orientación del plano sobre el que actúa. De este modo, el vector tensión se define como una función

$$\mathbf{t}(x, y, z, \mathbf{n})$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal al plano considerado. Para simplificar la notación, el vector tensión se representará por $\mathbf{t}$, omitiendo la dependencia explícita del punto y de $\mathbf{n}$.

En el caso del contorno exterior del sólido, esta función se reduce a una

función de punto, ya que la normal al contorno es única y está perfectamente definida. En el interior del sólido, en cambio, además del punto, es necesario especificar el plano (o de forma equivalente su normal) para que el vector tensión quede completamente determinado.

Así pues, en un mismo punto del sólido pueden definirse infinitos vectores tensión, uno asociado a cada plano que pase por dicho punto.

2.2.2. Componentes del vector tensión

Una descomposición habitual del vector tensión consiste en expresar sus componentes normal y tangencial con respecto al plano considerado. En esta descomposición, el vector tensión se divide en dos componentes: una componente perpendicular al plano, cuya dirección coincide con la del vector normal $\mathbf{n}$, y otra componente contenida en el propio plano (figura 2.3a).

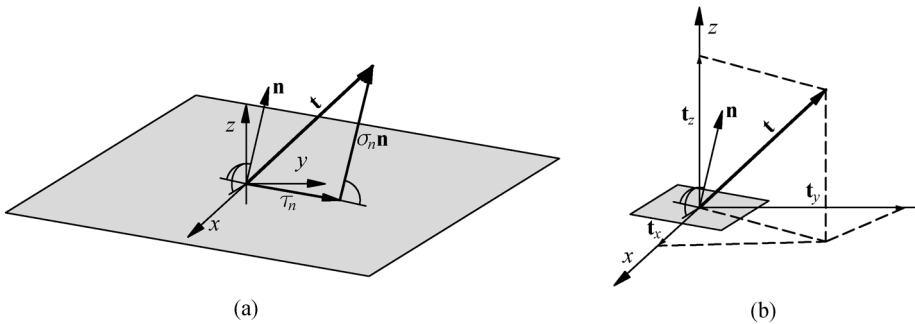


Figura 2.3. Descomposiciones del vector tensión.

(a) Componentes intrínsecas. (b) Componentes globales.

De la figura 2.3a se obtiene la siguiente descomposición del vector tensión

$$\mathbf{t} = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$$

donde σ_n es la tensión normal, correspondiente a la proyección del vector tensión sobre la normal al plano considerado, y $\boldsymbol{\tau}_n$ es la tensión tangencial correspondiente a la componente del vector tensión contenida en dicho plano.

De forma explícita, el módulo de la tensión normal viene dado por la proyección escalar del vector tensión sobre la normal al plano

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$$

mientras que la tensión tangencial se obtiene como la diferencia entre el vector tensión y su componente normal,

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t} - \sigma_n \mathbf{n}$$

Las cantidades σ_n y $\boldsymbol{\tau}_n$ reciben el nombre de *componentes intrínsecas del vector tensión*, ya que quedan definidas exclusivamente por el punto considerado y por la orientación del plano mediante su vector normal. Obsérvese que, aunque ambas son componentes intrínsecas, la tensión normal es una magnitud escalar, mientras que la tensión tangencial es un vector contenido en el plano considerado y ortogonal al vector normal.

Por otra parte, las componentes t_x, t_y, t_z del vector tensión expresadas en un sistema de coordenadas cartesiano xyz (figura 2.3b) se denominan *componentes globales del vector tensión*.

2.3. Formula de Cauchy. El tensor de tensiones

En el apartado anterior se ha visto que, en un punto interior del sólido, pueden definirse infinitos vectores tensión, cada uno asociado a uno de los infinitos planos que pueden pasar por dicho punto. Surge entonces la cuestión de si estos vectores son completamente independientes o si, por el contrario, existe alguna relación entre ellos.

La respuesta a esta cuestión viene dada por la *fórmula de Cauchy*, la cual establece una relación entre el vector tensión asociado a un plano de orientación arbitraria y los vectores tensión definidos, en ese mismo punto, sobre tres planos mutuamente perpendiculares.

Criterio de signos

Antes de proceder a la deducción de la fórmula de Cauchy, es necesario establecer un criterio de signos adecuado para los vectores tensión. Se considera positivo el vector tensión que actúa sobre una porción del sólido respecto de la cual el vector normal ($\mathbf{n}$) al plano considerado es exterior.

En la figura 2.4a se muestran las direcciones y sentidos positivos de los vectores tensión $\mathbf{t}^x$, $\mathbf{t}^y$, $\mathbf{t}^z$ que actúan sobre las caras de un paralelepípedo elemental. En la figura 2.4b se representan las componentes globales de dichos vectores tensión, desglosadas según sus proyecciones sobre el sistema de coordenadas cartesiano global, lo que permite un análisis coherente del equilibrio del sólido.

El criterio adoptado para la notación de las tensiones es el siguiente:

- *Tensiones normales* $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: se representan mediante la letra griega σ y un subíndice que indica el eje perpendicular al plano sobre el que actúa el vector tensión. Por ejemplo, σ_z corresponde a la tensión normal sobre

el plano perpendicular al eje z .

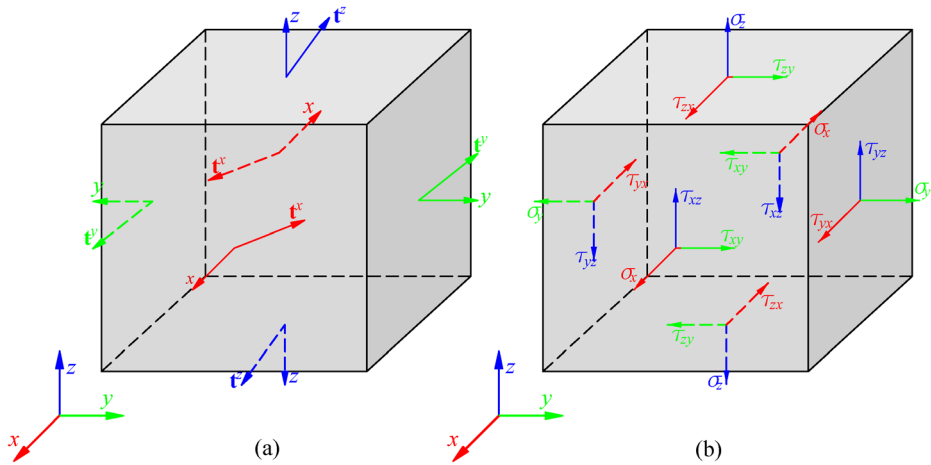


Figura 2.4. Direcciones y sentidos positivos de las tensiones en las caras de un paralelepípedo elemental. (a) Vectores tensión, (b) Componentes globales de los vectores tensión.

- *Componentes tangenciales* $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$: se representan mediante la letra griega τ y dos subíndices. El primero indica el eje perpendicular al plano del vector tensión y el segundo la dirección de la componente tangencial. Por ejemplo, τ_{xy} corresponde a la componente tangencial del vector tensión en el plano perpendicular al eje x , con dirección paralela al eje y .

De acuerdo con este criterio:

- en las caras del primer octante, los valores positivos de las tensiones corresponden a sentidos positivos de los ejes cartesianos, y
- en las caras opuestas, los valores positivos de las tensiones corresponden a sentidos negativos de dichos ejes.

Deducción de la fórmula de Cauchy

La deducción de la fórmula de Cauchy se basa en el establecimiento del equilibrio de fuerzas sobre un tetraedro infinitesimal cuyas cuatro caras son paralelas a los planos cuyas tensiones se desea relacionar. Para simplificar la demostración, se considerará un sistema de coordenadas cartesiano y se relacionará el vector tensión definido sobre un plano de vector normal $\mathbf{n}$ con los vectores tensión que actúan sobre tres planos perpendiculares a los ejes coordenados (figura 2.5).

Sobre cada una de las caras del tetraedro actúan las tres componentes de la fuerza debida al vector tensión asociado a la normal de dicha cara. Sean t_x, t_y, t_z las componentes del vector tensión $\mathbf{t}$ que actúa sobre la cara ABC de área dA_n .

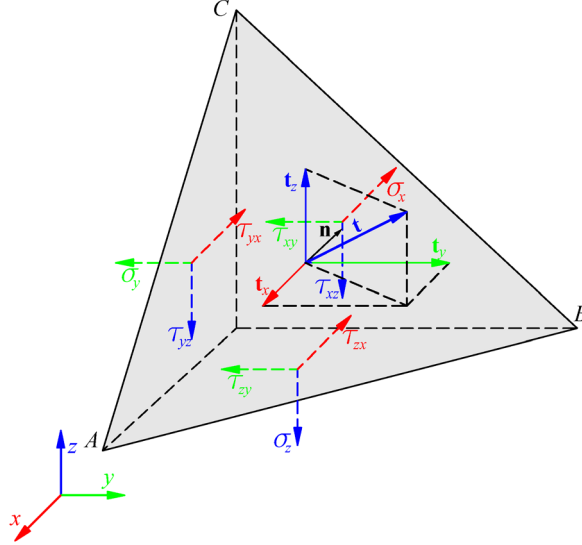


Figura 2.5. Tensiones en un tetraedro elemental.

Planteando las condiciones de equilibrio de fuerzas en las tres direcciones coordenadas se obtiene

$$\begin{aligned} t_x dA_n - \sigma_x dA_x - \tau_{yx} dA_y - \tau_{zx} dA_z + b_x dV &= 0 \\ t_y dA_n - \tau_{xy} dA_x - \sigma_y dA_y - \tau_{zy} dA_z + b_y dV &= 0 \\ t_z dA_n - \tau_{xz} dA_x - \tau_{yz} dA_y - \sigma_z dA_z + b_z dV &= 0 \end{aligned}$$

donde b_x, b_y, b_z son las fuerzas por unidad de volumen en las direcciones de los ejes x, y, z , respectivamente.

Las áreas de las caras del tetraedro paralelas a los planos coordenados son las proyecciones ortogonales del área dA_n de la cara ABC

$$dA_x = n_x dA_n, \quad dA_y = n_y dA_n, \quad dA_z = n_z dA_n$$

donde dA_x, dA_y, dA_z son las áreas de las caras perpendiculares a los ejes x, y, z , respectivamente, y $n_x = \cos \gamma_x, n_y = \cos \gamma_y, n_z = \cos \gamma_z$, los cosenos directores del vector $\mathbf{n}$, y $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ los ángulos que el vector $\mathbf{n}$ forma, respectivamente, con los

ejes coordenados x, y, z .

$$\begin{aligned} t_x dA_n - \sigma_x n_x dA_n - \tau_{yx} n_y dA_n - \tau_{zx} n_z dA_n + b_x dV &= 0 \\ t_y dA_n - \tau_{xy} n_x dA_n - \sigma_y n_y dA_n - \tau_{zy} n_z dA_n + b_y dV &= 0 \\ t_z dA_n - \tau_{xz} n_x dA_n - \tau_{yz} n_y dA_n - \sigma_z n_z dA_n + b_z dV &= 0 \end{aligned}$$

Dividiendo las ecuaciones de equilibrio por dA_n y despreciando las fuerzas por unidad de volumen frente a las fuerzas por unidad de superficie -ya que las primeras varían con h^3 mientras que las segundas varían con h^2 , siendo h una dimensión característica del tetraedro-, se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= t_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z &= t_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= t_z \end{aligned} \quad (2.3.1a)$$

Esta expresión puede escribirse en forma matricial expandida, como

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (2.3.1b)$$

o, de forma matricial compacta, como

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.3.1c)$$

y, finalmente, en notación indicial

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.3.1d)$$

Esta ecuación recibe el nombre de *fórmula de Cauchy* y permite determinar el vector tensión asociado a un plano de orientación arbitraria a partir de los vectores tensión definidos sobre tres planos mutuamente perpendiculares. La matriz que contiene las componentes de la tensión en estos planos recibe el nombre de *tensor de tensiones* o *tensor de Cauchy*.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (2.3.1a) a (2.3.1d) muestran que el vector tensión sobre un plano cualquiera se obtiene multiplicando el tensor de tensiones por el vector unitario normal a dicho plano. En consecuencia, el estado tensional en el interior

de un sólido elástico queda completamente determinado si se conoce el tensor de tensiones en todos sus puntos.

2.4. Ecuaciones de equilibrio interno en un paralelepípedo elemental

Sea un punto P situado en el interior de un sólido en equilibrio, sometido a un sistema de fuerzas exteriores que incluye fuerzas de superficie y fuerzas de volumen. En el entorno de dicho punto se considera un paralelepípedo infinitesimal definido por seis planos, paralelos dos a dos a los planos coordenados de un sistema cartesiano de ejes x, y, z .

Sobre cada una de las caras del paralelepípedo actúa un vector tensión, cuyas componentes globales se muestran en la figura 2.6. En total aparecen dieciocho componentes de tensión asociadas a las seis caras del volumen diferencial, las cuales describen el estado tensional del punto P en el sistema de referencia cartesiano.

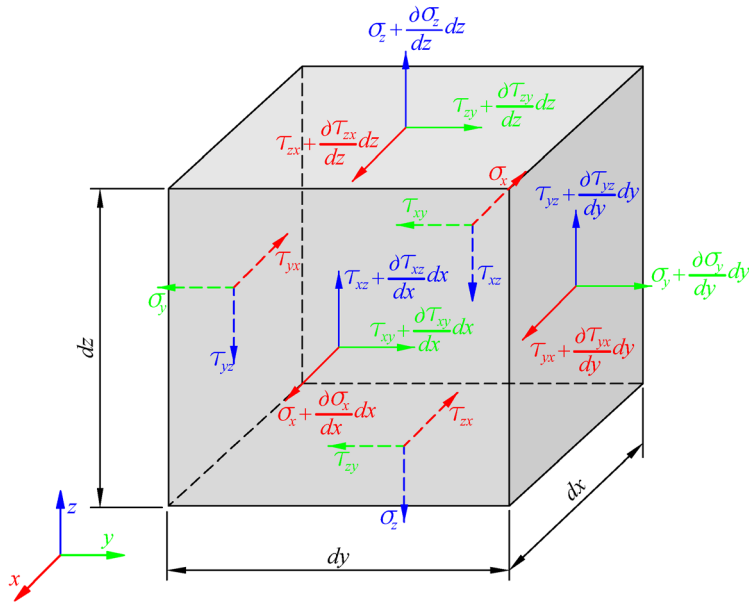


Figura 2.6. Tensiones en las caras de un paralelepípedo elemental.

Se admite que las componentes del tensor de tensiones son funciones continuas de las coordenadas del punto en el que actúan y que sus incrementos pueden expresarse mediante las derivadas parciales respecto de dichas coordenadas. Por ejemplo, si sobre la cara $x = c$ actúa una tensión normal σ_x , sobre la cara

opuesta $x = c+dx$ dicha tensión será $\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx$, tal como se indica en la figura 2.6. Sobre el volumen diferencial actúan además fuerzas por unidad de volumen $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$.

Equilibrio de fuerzas

Para que el paralelepípedo elemental esté en equilibrio, es necesario que la suma de las proyecciones sobre cada uno de los ejes coordenados, de todas las fuerzas que actúan sobre él, sea nula.

En la figura 2.7 se muestran las tensiones que actúan en la dirección del eje x .

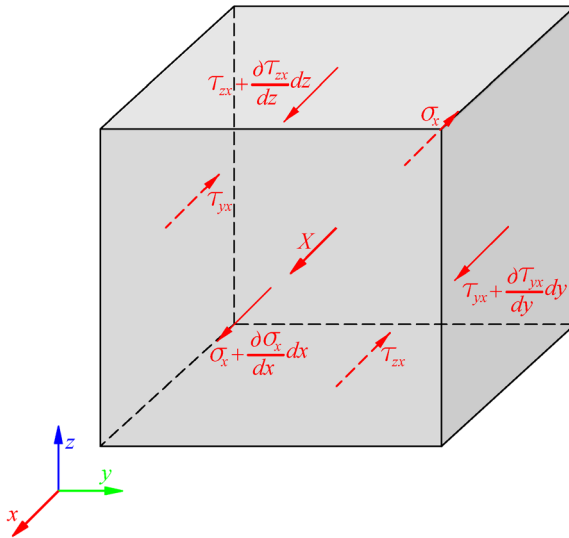


Figura 2.7. Componentes de las tensiones en la dirección del eje x .

La condición de equilibrio de fuerzas en la dirección del eje x , conduce a la ecuación

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \\ & \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ & \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + b_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

Simplificando y dividiendo por el volumen diferencial $dx dy dz$, se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$

Procediendo de forma análoga en las direcciones de los ejes y, z , se obtienen otras dos ecuaciones. Así pues, las tres ecuaciones de equilibrio de fuerzas son

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

o, en notación indicial, como

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (2.4.1)$$

Estas ecuaciones relacionan las tensiones internas con las fuerzas por unidad de volumen y constituyen las *ecuaciones de equilibrio interno de fuerzas*.

Equilibrio de momentos

Además del equilibrio de fuerzas, es necesario que en el paralelepípedo elemental se cumpla el equilibrio de momentos.

Considerando el equilibrio de momentos alrededor del eje z , se observa que las componentes de las fuerzas paralelas al eje z no contribuyen al momento alrededor del eje z . En la figura 2.8 se muestran las componentes de las tensiones que contribuyen al momento alrededor del eje z .

Si el equilibrio de momentos se plantea respecto a un eje Z , paralelo al eje z y que pasa por el centro de gravedad del paralelepípedo elemental, las distancias al eje de las fuerzas resultantes de las tensiones normales ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{zx}, \tau_{zy}$), y de las fuerzas por unidad de volumen, son cero, y el equilibrio de momentos es

$$\begin{aligned} \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} \\ - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

Simplificando, dividiendo por $dx dy dz$ y pasando al límite $dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0$, esta expresión se reduce a

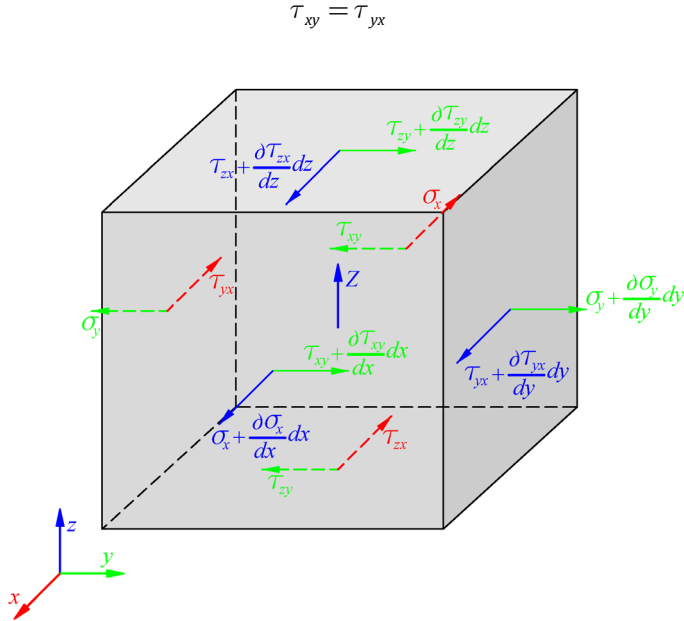


Figura 2.8. Componentes de las tensiones que contribuyen al momento alrededor del eje z

Imponiendo de forma análoga el equilibrio de momentos respecto a ejes paralelos a los ejes y, x , se obtienen tres ecuaciones de equilibrio de momentos, que pueden escribirse como

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

o, en notación indicial, como

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.4.2)$$

Estas igualdades expresan una propiedad fundamental de las tensiones tangenciales: en un punto de un sólido, las componentes de las tensiones tangenciales correspondientes a dos planos mutuamente perpendiculares son iguales en la dirección normal a la arista común de dichos planos. Este resultado se conoce como *teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales*. El sentido de ambas tensiones es tal que, para un diedro recto, o bien ambas se dirigen hacia la arista (figura 2.9a) o bien ambas se separan de ella (figura 2.9b).

Consecuencias sobre el tensor de tensiones

Sustituyendo las ecuaciones de equilibrio interno de momentos (2.4.2) en las ecuaciones de equilibrio interno de fuerzas (2.4.1) las ecuaciones de equilibrio

interno quedan en la forma

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

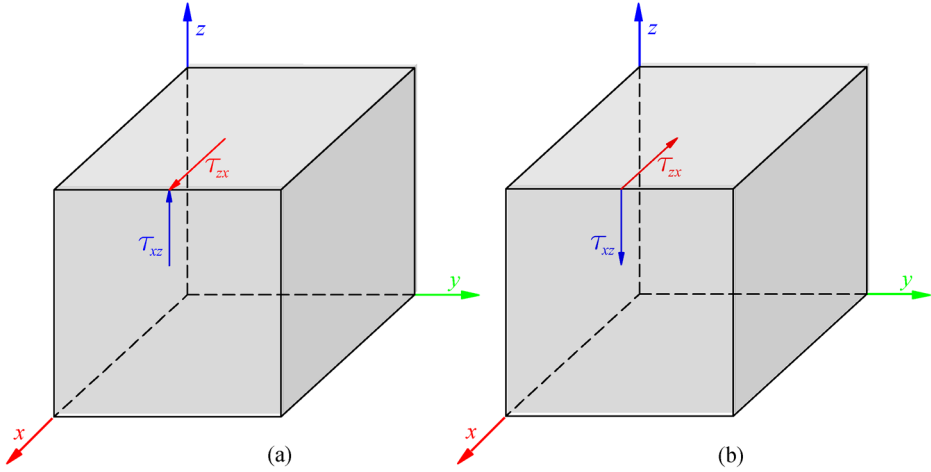


Figura 2.9. Reciprocidad de las tensiones tangenciales.

De la misma forma, sustituyendo las condiciones de simetría (2.4.8) en la fórmula de Cauchy (2.3.5), esta puede expresarse como

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

El tensor de tensiones adopta la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (2.4.8), que expresan la *simetría del tensor de tensiones*, muestran que el estado tensional en un punto de un sólido queda completamente determinado por seis componentes independientes del tensor de tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Esta reducción se debe a que la simetría del tensor se obtiene como consecuencia directa de las ecuaciones de equilibrio de momentos.

En consecuencia, el equilibrio interno de un sólido elástico queda descrito por seis ecuaciones diferenciales independientes: tres ecuaciones de equilibrio de fuerzas y tres condiciones de simetría del tensor de tensiones.

Ejemplo 2.1. Vector tensión: componentes globales e intrínsecas

Dado el tensor de tensiones en el sistema cartesiano, en un punto de coordenadas x, y, z .

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 200 & 0 \\ 200 & -300 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. Representar los vectores tensión en los planos paralelos a los coordenados.
2. Calcular las componentes globales del vector tensión asociado al plano de normal unitaria $[2/3 \quad -2/3 \quad 1/3]^T$.
3. Calcular el módulo del vector tensión obtenido en el punto 2.
4. Calcular las componentes intrínsecas del vector tensión.
5. Calcular el ángulo entre el vector tensión y la normal al plano.

Solución

1. Representación de los vectores tensión en los planos paralelos a los coordenados

Las componentes globales de las tensiones en los planos paralelos a los coordenados se muestran en la figura 2.10.

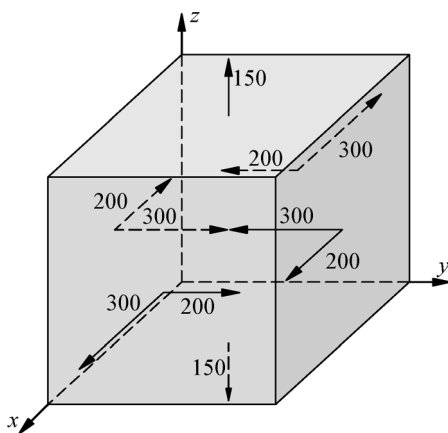


Figura 2.10. Componentes de las tensiones en planos paralelos a los coordenados.

Los módulos, direcciones y sentidos de los vectores tensión en los planos paralelos a los coordenados son

Cara eje x+

$$\mathbf{t}^x = [t_x^x \quad t_y^x \quad t_z^x]^T = [\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}]^T = [300 \quad 200 \quad 0]^T$$

$$|\mathbf{t}^x| = \sqrt{300^2 + 200^2} = 360,56$$

$$\alpha_x = \arccos\left(\frac{t_x^x}{|\mathbf{t}^x|}\right) = \arccos\left(\frac{300}{360,56}\right) = 33,69^\circ$$

$$\alpha_y = \arccos\left(\frac{t_y^x}{|\mathbf{t}^x|}\right) = \arccos\left(\frac{200}{360,56}\right) = 56,31^\circ$$

$$\alpha_z = \arccos\left(\frac{t_z^x}{|\mathbf{t}^x|}\right) = \arccos\left(\frac{0}{360,56}\right) = 90^\circ$$

Cara eje y+

$$\mathbf{t}^y = [t_x^y \quad t_y^y \quad t_z^y]^T = [\tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz}]^T = [200 \quad -300 \quad 0]^T$$

$$|\mathbf{t}^y| = \sqrt{(200)^2 + (-300)^2} = 360,56$$

$$\beta_x = \arccos\left(\frac{t_x^y}{|\mathbf{t}^y|}\right) = \arccos\left(\frac{200}{360,56}\right) = 56,31^\circ$$

$$\beta_y = \arccos\left(\frac{t_y^y}{|\mathbf{t}^y|}\right) = \arccos\left(\frac{-300}{360,56}\right) = 146,31^\circ$$

$$\beta_z = \arccos\left(\frac{t_z^y}{|\mathbf{t}^y|}\right) = \arccos\left(\frac{0}{360,56}\right) = 90^\circ$$

Cara eje z+

$$\mathbf{t}^z = [t_x^z \quad t_y^z \quad t_z^z]^T = [\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z]^T = [0 \quad 0 \quad 150]^T$$

$$|\mathbf{t}^z| = 150$$

$$\gamma_x = \arccos\left(\frac{t_x^z}{|\mathbf{t}^z|}\right) = \arccos\left(\frac{0}{150}\right) = 90^\circ$$

$$\gamma_y = \arccos \left(\frac{\mathbf{t}_y^z}{|\mathbf{t}^z|} \right) = \arccos \left(\frac{0}{150} \right) = 90^\circ$$

$$\gamma_z = \arccos \left(\frac{\mathbf{t}_z^z}{|\mathbf{t}^z|} \right) = \arccos \left(\frac{150}{150} \right) = 0^\circ$$

Los vectores tensión en los planos paralelos a los coordenados se muestran en la figura 2.11.

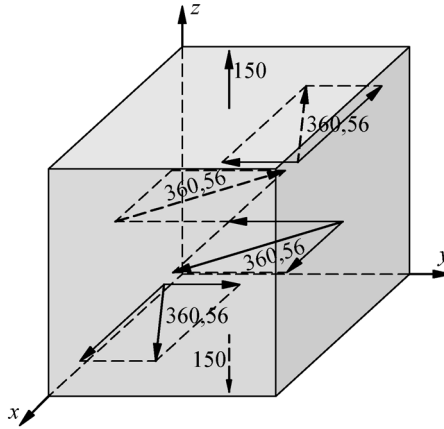


Figura 2.11. Representación de los vectores tensión en los planos paralelos a los coordenados.

- Componentes globales del vector tensión asociado al plano de normal unitaria $\begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 300 & 200 & 0 \\ 200 & -300 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,66 \\ 333,33 \\ 50 \end{bmatrix}$$

- Módulo del vector tensión

$$|\mathbf{t}| = \sqrt{(t_x)^2 + (t_y)^2 + (t_z)^2} = \sqrt{66,66^2 + 333,33^2 + 50^2} = 343,56 \text{ MPa}$$

4. Componentes intrínsecas del vector tensión

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{t}| |\mathbf{n}| \cos(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = |\mathbf{t}| \cos(\mathbf{t}, \mathbf{n})$$

$$\sigma_n = \mathbf{t}^T \mathbf{n} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66,66 & 333,33 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = -161,11 \text{ MPa}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_n \mathbf{n} = -161,11 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -107,4 & 107,4 & -53,7 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_n &= \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_n = \begin{bmatrix} 66,66 + 107,4 & 333,33 - 107,4 & 50 + 53,7 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 174 & 225,9 & 103,7 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{\tau}_n| = \sqrt{\tau_{nx}^2 + \tau_{ny}^2 + \tau_{nz}^2} = \sqrt{174^2 + 225,9^2 + 103,7^2} = 303,4 \text{ MPa}$$

De forma alternativa, la componente tangencial puede obtenerse en la forma

$$|\boldsymbol{\tau}_n| = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - |\boldsymbol{\sigma}_n|^2} = \sqrt{343,56^2 - 161,11^2} = 303,4 \text{ MPa}$$

5. Angulo entre el vector tensión y la normal al plano

$$\cos(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = \frac{\sigma_n}{|\mathbf{t}|} = \frac{-161,11}{343,56} = -0,4689$$

$$\text{angulo}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = \text{acos}(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = \text{acos}(-0,4689) = 117,96^\circ$$

En la figura 2.12 se muestra la representación, realizada con la aplicación LabTE, del plano de tensión, normal al plano, vector tensión, componentes intrínsecas y componentes globales del vector tensión.

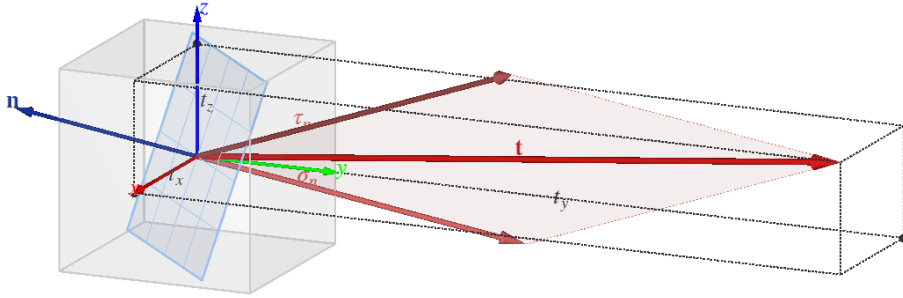


Figura 2.12. Plano de tensión, normal al plano, vector tensión, componentes intrínsecas y componentes globales del vector tensión (LabTE).

Ejemplo 2.2. Determinación del plano libre de tensiones

La matriz de componentes globales del tensor de tensiones en un punto P es

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. Determinar la tensión σ_x con la condición de que haya un plano libre de tensiones que pase por el punto P .
2. Determinar la normal unitaria $\mathbf{n}$ del plano libre de tensiones.
3. Representar el estado de tensiones en el punto P y el plano libre de tensiones.

Solución

1. Tensión σ_x con la condición de que haya un plano libre de tensiones que pase por el punto P .

Aplicando la fórmula de Cauchy, la condición de plano libre de tensiones es

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

La solución de estas ecuaciones es

$$\sigma_x n_x + 2n_y + n_z = 0 \Rightarrow \sigma_x(-n_z) + n_z + n_z = 0 \Rightarrow \sigma_x = 2 \quad (3)$$

$$2n_x + 2n_z = 0 \Rightarrow 2(-2n_y) + 2n_z \Rightarrow n_y = \frac{n_z}{2} \quad (2)$$

$$n_x + 2n_y = 0 \Rightarrow n_x = -2n_y \quad (1)$$

2. Normal unitaria $\mathbf{n}$ del plano libre de tensiones

Además de las tres ecuaciones anteriores, de las cuales sólo dos son independientes, se dispone de la condición de que el vector normal $\mathbf{n}$ es un vector unitario

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$\sigma_x(-n_z) + n_z + n_z = 0 \Rightarrow \sigma_x = 2 \quad (3)$$

$$2(-2n_y) + 2n_z \Rightarrow n_y = \frac{n_z}{2} \quad (2)$$

$$(1)$$

$$2n_x + 2n_y + n_z = 0 \Rightarrow$$

$$2n_x + 2n_z = 0 \Rightarrow n_z = -n_x \quad (1)$$

$$n_x + 2n_y = 0 \Rightarrow n_y = \frac{n_z}{2} = -\frac{n_x}{2} \quad (2)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow n_x^2 + \left(-\frac{n_x}{2}\right)^2 + (-n_x)^2 = 1 \Rightarrow n_x = \pm \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$n_y = -\frac{n_x}{2} = \mp \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$n_z = -n_x = \mp \frac{2}{3} \quad (5)$$

$$\mathbf{n} = \pm \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$$

3. Representación del estado de tensiones en el punto P y del plano libre de tensiones

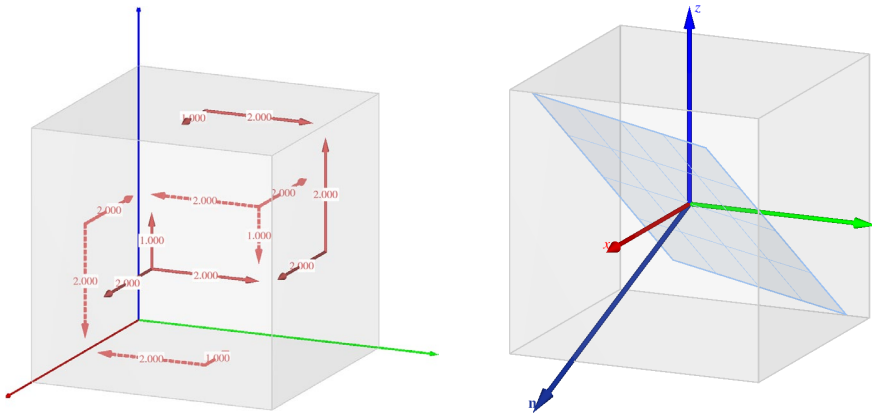


Figura 2.13. Representación del estado de tensiones en el punto P (imagen de la izquierda), el plano libre de tensiones y el vector $\mathbf{n}$ normal al mismo (imagen de la derecha). Imagen de la solución obtenida con LabTE.

2.5. Transformaciones de coordenadas

La fórmula de Cauchy establece que el vector tensión que actúa sobre un plano de normal $\mathbf{n}$, conocido el tensor de tensiones referido a un sistema de coordenadas cartesiano, viene dado por la expresión

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.5.1)$$

Sea ahora $\boldsymbol{\sigma}^*$ el tensor de tensiones referido a otro sistema de coordenadas cartesiano, también ortogonal, obtenido mediante una rotación de ejes. El vector tensión correspondiente al mismo plano físico, cuya orientación en el nuevo sistema de coordenadas viene definida por el vector unitario $\mathbf{n}^*$, viene dado por

$$\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{n}^* \quad (2.5.2)$$

Los vectores tensión expresados en ambos sistemas de referencia, correspondientes al mismo plano, están relacionados mediante la *matriz de rotación de ejes* $\mathbf{R}$, de forma que

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{R} \mathbf{t} \quad (2.5.3)$$

La matriz de rotación $\mathbf{R}$ está formada por los cosenos directores de los ejes

del nuevo sistema de coordenadas respecto del sistema original. En particular, sus elementos representan los cosenos de los ángulos -positivos en sentido antihorario- entre cada uno de los ejes nuevos y los ejes antiguos.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) & \cos(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) & \cos(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}) \\ \cos(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}) & \cos(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}) & \cos(\mathbf{y}^*, \mathbf{z}) \\ \cos(\mathbf{z}^*, \mathbf{x}) & \cos(\mathbf{z}^*, \mathbf{y}) & \cos(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

Los vectores unitarios normales al plano en ambos sistemas de referencia están relacionados por la misma matriz de rotación

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{R}\mathbf{n}$$

Como la transformación corresponde a un cambio entre sistemas de coordenadas cartesianos ortogonales dextrógiros, la matriz de rotación es ortogonal, por lo que su inversa coincide con su transpuesta

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

y

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}^T \mathbf{n}^* \quad (2.5.4)$$

Sustituyendo las expresiones (2.5.1) y (2.5.5) en la (2.5.3), se obtiene

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{R}\mathbf{t} = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T \mathbf{n}^*$$

Comparando esta expresión con la ecuación (2.5.2), se deduce finalmente la ley de transformación del tensor de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T \quad (2.5.6)$$

La ecuación (2.5.6) permite obtener el tensor de tensiones referido a cualquier sistema de coordenadas cartesiano ortogonal si se conoce el tensor de tensiones en otro sistema de referencia y la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas. Esta expresión pone de manifiesto el carácter tensorial de $\boldsymbol{\sigma}$, ya que garantiza que el vector tensión asociado a un plano dado es independiente del sistema de referencia empleado para su descripción.

2.6. Análisis de la tensión en un punto

2.6.1. Tensiones y direcciones principales

Independientemente del estado de tensiones existente en un punto, siempre es posible seleccionar un sistema especial de ejes con origen en dicho punto tal que, al expresar las componentes de la tensión en ese sistema, las tensiones tangenciales sean nulas. A estos ejes especiales se les denomina *ejes principales de tensiones* o *direcciones principales*.

En un plano perpendicular a una dirección principal, el vector tensión es perpendicular al plano considerado; por tanto, el vector tensión es colineal con la normal al plano y puede expresarse como el producto de un escalar por el vector normal unitario. A los tres planos perpendiculares a las direcciones principales se les denomina *planos principales*, y las componentes normales de la tensión en dichos planos se denominan *tensiones principales*, que se representan por $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

La tensión principal algebraicamente mayor es la mayor tensión normal que actúa sobre cualquier plano que pase por el punto, mientras que la tensión principal algebraicamente menor es la menor tensión normal actuando sobre cualquiera de dichos planos.

La existencia de un conjunto de tres direcciones principales en cada punto se deduce del hecho de que el tensor de tensiones es un *tensor simétrico de segundo orden*, propiedad que garantiza la existencia de una base ortogonal de vectores propios. Todo lo anterior se refiere al estado de tensiones *en un punto*; en general, las direcciones principales en puntos distintos de un sólido no coinciden. Únicamente en el caso de un estado tensional uniforme las direcciones y tensiones principales son las mismas en todos los puntos del cuerpo.

Las direcciones principales en un punto pueden determinarse cuando se conocen las componentes del tensor de tensiones en algún sistema de coordenadas. Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario que define una de las direcciones principales y sea σ la tensión principal correspondiente al plano cuya normal es $\mathbf{n}$. Al no existir componente tangencial en dicho plano, el vector tensión es paralelo a $\mathbf{n}$, de modo que

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$$

Por otra parte, según la fórmula de Cauchy, el vector tensión asociado a un plano de normal $\mathbf{n}$ viene dado por

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Si la normal al plano coincide con una dirección principal, ambas expresiones del vector tensión deben ser equivalentes, lo que conduce a la condición

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.6.1)$$

siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{n}$ el vector columna $\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T$, y

$$\sigma \mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones (2.6.1) es un sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales para los cosenos directores, que deben además satisfacer la condición de que $\mathbf{n}$ es un vector unitario

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2.6.2)$$

En forma expandida, la ecuación (2.6.1) es

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z &= 0 \\ \tau_{yx}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z &= 0 \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Los tres cosenos directores no pueden ser todos cero, ya que deben satisfacer la ecuación (2.6.2). Un sistema de ecuaciones homogéneas lineales, como el de la ecuación (2.6.3), tiene soluciones que no son todas cero sí y solo sí el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.6.4)$$

Para valores dados de las nueve componentes de la tensión, la ecuación

(2.6.4) es una ecuación cúbica para la incógnita σ . Puesto que la matriz de tensiones es simétrica y tiene elementos reales, las tres raíces de la ecuación cúbica son todas números reales. Las tres raíces pueden obtenerse por cualquiera de los métodos estándar de análisis numérico.

El desarrollo de este determinante conduce a una ecuación cúbica, llamada *ecuación característica*,

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.6.5)$$

donde los símbolos I_1, I_2, I_3 son invariantes escalares del tensor de tensiones, definidos por

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \\ I_3 &= \det|\boldsymbol{\sigma}| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación característica (2.6.5) son los *valores propios* del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y se denominan *tensiones principales* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, y los vectores propios asociados corresponden a las *direcciones principales*.

Una vez determinada una tensión principal, por ejemplo σ_1 , su valor se sustituye en el sistema (2.6.3), que se reduce a dos ecuaciones lineales independientes. Dichas ecuaciones pueden resolverse junto con la ecuación de normalización (2.6.2) para obtener los cosenos directores de la dirección principal asociada. El procedimiento se repite para σ_2 . La tercera dirección principal se obtiene imponiendo la ortogonalidad con las dos anteriores y el requisito de que las tres direcciones formen un sistema ortogonal dextrógiro, lo que conduce a

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

Invariantes

Dado que las tensiones principales son las raíces de la ecuación característica del tensor de tensiones y dichas raíces no dependen de la elección del sistema de coordenadas, los coeficientes de esta ecuación cúbica son también independientes del sistema de referencia. En consecuencia, las magnitudes I_1, I_2, I_3 asociadas a dichos coeficientes son *escalares invariantes* frente a rotaciones del

sistema de ejes cartesiano y se denominan *invariantes del tensor de tensiones*.

Si los ejes de referencia se eligen de modo que coincidan con las direcciones principales, el tensor de tensiones queda expresado únicamente mediante tensiones normales, y los invariantes adoptan las siguientes expresiones en función de las tensiones principales

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \det|\boldsymbol{\sigma}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

El escalar I_1 es el *primer invariante del tensor de tensiones* o *invariante lineal*. Coincide con la traza de la matriz del tensor de tensiones y es igual a la suma de los elementos de su diagonal principal,

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

El escalar I_2 es el *segundo invariante del tensor de tensiones*. Se trata de una expresión cuadrática homogénea en las componentes del tensor y por ello se denomina también *invariante cuadrático*

$$\begin{aligned} I_2 &= (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) - (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \\ &= (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \end{aligned}$$

Por último, I_3 es el *tercer invariante del tensor de tensiones* y coincide con el determinante de la matriz del tensor de tensiones. Es una expresión cúbica homogénea en las componentes del tensor y por ello se denomina también *invariante cúbico*

$$I_3 = \det|\boldsymbol{\sigma}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Los invariantes I_1, I_2, I_3 dependen únicamente del estado tensional en el punto considerado, siendo completamente independientes del sistema de coordenadas elegido para describir dicho estado.

Conocidas las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en un punto, y adoptando como ejes de referencia los coincidentes con las direcciones principales, el vector tensión correspondiente a un plano definido por el vector normal unitario $\mathbf{n}$ cuyos cosenos directores son n_1, n_2, n_3 (figura 2.14), viene dado por

$$t_i = \sigma_i n_i \quad i = 1, 2, 3$$

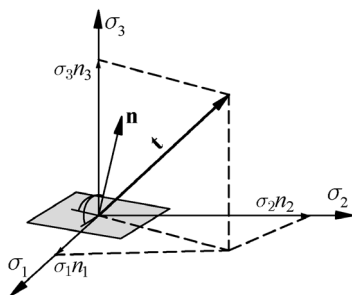


Figura 2.14. Vector tensión a partir de las tensiones principales.

Ejemplo 2.3. Tensiones y direcciones principales

La matriz del tensor de tensiones en un sistema de coordenadas cartesiano xyz , es

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. Las tensiones principales.
2. Las direcciones principales.
3. Las tensiones tangenciales máximas.

Solución

1. Tensiones principales

El problema de autovalores es

$$[\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \sigma & 2 & 0 \\ 2 & 4 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 6 - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

La ecuación característica es

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Siendo los invariantes

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 1 + 4 + 6 = 11$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 30$$

$$I_3 = \det|\boldsymbol{\sigma}| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Sustituyendo los valores de los invariantes en la ecuación característica se tiene

$$\sigma^3 - 11 \cdot \sigma^2 + 30 \cdot \sigma - 0 = 0$$

que puede ponerse en la forma

$$\sigma(\sigma^2 - 11 \cdot \sigma + 30) = 0$$

Una solución es $\sigma_1 = 0$ y las otras dos soluciones son las de la ecuación de segundo grado $\sigma_2 = 6, \sigma_3 = 5$. Ordenando los valores de σ , de forma que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, las tensiones principales son

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]^T = [6 \quad 5 \quad 0]^T$$

2. Direcciones principales

- Dirección principal 1. $\sigma = \sigma_1 = 6$

$$\begin{vmatrix} 1-6 & 2 & 0 \\ 2 & 4-6 & 0 \\ 0 & 0 & 6-6 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} n_x^{(1)} \\ n_y^{(1)} \\ n_z^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -5n_x^{(1)} + 2n_y^{(1)} &= 0 \Rightarrow n_x^{(1)} = \frac{2n_y^{(1)}}{5} \\ 2n_x^{(1)} - 2n_y^{(1)} &= 0 \Rightarrow n_x^{(1)} = n_y^{(1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow n_x^{(1)} = n_y^{(1)} = 0$$

$$0n_z^{(1)} = 0$$

$$n_x^{(1)^2} + n_y^{(1)^2} + n_z^{(1)^2} = 1 \Rightarrow 0^2 + 0^2 + n_z^{(1)^2} = 1 \Rightarrow n_z^{(1)^2} = 1 \Rightarrow n_z^{(1)} = \pm 1$$

$$n_x^{(1)} = 0 \quad n_y^{(1)} = 0 \quad n_z^{(1)} = 1$$

Se adopta la dirección y sentido positivo del eje z

$$n_x^{(1)} = 0 \quad n_y^{(1)} = 0 \quad n_z^{(1)} = 1$$

- Dirección principal 2. $\sigma = \sigma_2 = 5$

$$\begin{vmatrix} 1-5 & 2 & 0 \\ 2 & 4-5 & 0 \\ 0 & 0 & 6-5 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} n_x^{(2)} \\ n_y^{(2)} \\ n_z^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

$$-4n_x^{(2)} + 2n_y^{(2)} = 0 \Rightarrow n_x^{(2)} = \frac{n_y^{(2)}}{2}$$

$$2n_x^{(2)} - n_y^{(2)} = 0$$

$$n_z^{(2)} = 0 \Rightarrow n_z^{(2)} = 0$$

$$n_x^{(2)^2} + n_y^{(2)^2} + n_z^{(2)^2} = 1 \Rightarrow \frac{n_x^{(2)^2}}{2} + n_y^{(2)^2} + 0^2 = 1 \Rightarrow n_y^{(2)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow n_y^{(2)} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$n_x^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad n_y^{(2)} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \quad n_z^{(2)} = 0$$

Se adoptan los sentidos positivos

$$n_x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad n_y^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad n_z^{(2)} = 0$$

- Dirección principal 3. $\sigma = \sigma_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 2 & 0 \\ 2 & 4-0 & 0 \\ 0 & 0 & 6-0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} n_x^{(3)} \\ n_y^{(3)} \\ n_z^{(3)} \end{bmatrix} = 0$$

$$n_x^{(3)} + 2n_y^{(3)} = 0 \Rightarrow n_y^{(3)} = -\frac{n_x^{(3)}}{2}$$

$$2n_x^{(3)} + 4n_y^{(3)} = 0$$

$$6n_z^{(3)} = 0 \Rightarrow n_z^{(3)} = 0$$

$$n_x^{(3)^2} + n_y^{(3)^2} + n_z^{(3)^2} = 1 \Rightarrow n_x^{(3)^2} + \left(\frac{n_x^{(3)}}{2}\right)^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow n_x^{(3)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow n_x^{(3)} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Las direcciones posibles son

$$n_x^{(3)} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \quad n_y^{(3)} = \mp \frac{1}{\sqrt{5}} \quad n_z^{(3)} = 0$$

Puesto que esta dirección tiene que ser perpendicular a las direcciones 1 y 2, y el sistema tiene que ser dextrógiro, las componentes de la dirección principal 3 son

$$n_x^{(3)} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad n_y^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad n_z^{(3)} = 0$$

A esta misma solución se llega mediante el producto vectorial de las direcciones principales 1 y 2

$$\mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(2)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$$

3. Tensiones tangenciales máximas

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{6-5}{2} = 0,5 \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{6-0}{2} = 3,0 \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{5-0}{2} = 2,5$$

2.7. Tensores esférico y desviador

Sea σ la tensión normal media en un punto y p la presión normal media, definidas como

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1$$

Con estas definiciones, el tensor de tensiones en un punto puede expresarse de forma única como la suma de dos tensores: uno que representa un estado de tensiones esférico o hidrostático, denominado *tensor esférico*, y otro que representa el estado restante, denominado *tensor desviador*.

El tensor esférico corresponde a un estado tensional en el que todas las tensiones normales son iguales a $-p$ y todas las tensiones tangenciales son nulas.

Dicho tensor se obtiene como el producto del escalar $-p$ por la matriz identidad

$$\sigma^{(e)} \mathbf{I} = -p \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

El tensor desviador de tensiones se define como la diferencia entre el tensor de tensiones total y el tensor esférico

$$\sigma^{(d)} = \sigma + p \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - \sigma = \sigma_x + p, & \sigma'_y &= \sigma_y - \sigma = \sigma_y + p \\ \sigma'_z &= \sigma_z - \sigma = \sigma_z + p \\ \tau'_{ij} &= \tau_{ij} \end{aligned}$$

Esta *descomposición del tensor de tensiones* en una parte esférica y otra desviadora es *invariante frente a rotaciones del sistema de referencia* y depende únicamente del estado tensional en el punto considerado.

Es habitual afirmar que las tensiones desviadoras producen cambios de forma, mientras que las tensiones hidrostáticas producen cambios de volumen sin cambio de forma. Esta afirmación es estrictamente válida en medios continuos *isótropos*, es decir, en materiales cuyas propiedades mecánicas son iguales en todas las direcciones.

En efecto, una presión hidrostática uniforme aplicada a una esfera formada por un material *isótropo* reduce su volumen sin alterar su forma. Sin embargo, si el material es *anisótropo*, de modo que presenta distinta rigidez según la dirección, un mismo estado de presión hidrostática puede producir deformaciones diferentes en direcciones distintas y, por tanto, dar lugar a cambios de forma. En consecuencia, una presión hidrostática puede producir cambios de forma en materiales *anisótropos*.

2.7.1. Valores principales del tensor desviador

Las direcciones principales del tensor desviador coinciden con las direcciones principales del tensor de tensiones total. Esto se debe a que ambos tensores difieren únicamente en una parte esférica, la cual no introduce tensiones tangenciales y no altera las direcciones principales.

Las tensiones principales desviadoras vienen dadas por

$$\sigma'_i = \sigma_i - \sigma = \sigma_i + p \quad (2.7.1)$$

En problemas tridimensionales resulta, en muchos casos, más sencillo determinar primero las tensiones principales desviadoras y utilizar posteriormente la ecuación (2.7.1) para obtener las tensiones principales del tensor de tensiones total. Esta ventaja se debe a que la ecuación característica del tensor desviador no contiene término.

En efecto, si σ'_i es una cualquiera de las tensiones principales desviadoras, un razonamiento análogo al seguido para las tensiones y direcciones principales conduce a

$$\sigma'^3 + I'_2 \sigma' - I'_3 = 0$$

donde $I'_1 = 0$, I'_2, I'_3 son los invariantes del tensor desviador $\sigma^{(d)}$, definidos de forma análoga a los invariantes del tensor de tensiones, pero calculados a partir de las componentes del tensor desviador.

2.8. Tensiones octaédricas. Tensores esférico y desviador

2.8.1. Planos octaédricos

Se definen los *planos octaédricos* como aquellos planos que están igualmente inclinados respecto a los tres ejes principales de tensiones, de forma que, en el sistema de ejes principales, los planos octaédricos forman las caras de un octaedro regular (figura 2.15).

Los cosenos directores de las normales unitarias a dichos planos satisfacen la condición de igualdad de sus módulos. Junto con la condición de normalización del vector unitario, se obtiene

$$|\mathbf{n}_1^o| = |\mathbf{n}_2^o| = |\mathbf{n}_3^o|$$

lo que unido al carácter unitario de los vectores conduce a

$$|\mathbf{n}_i^o| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.8.1)$$

Las distintas combinaciones de signos de los cosenos directores que se

derivan de la ecuación (2.8.1) generan los ocho planos octaédricos representados en la figura 2.15.

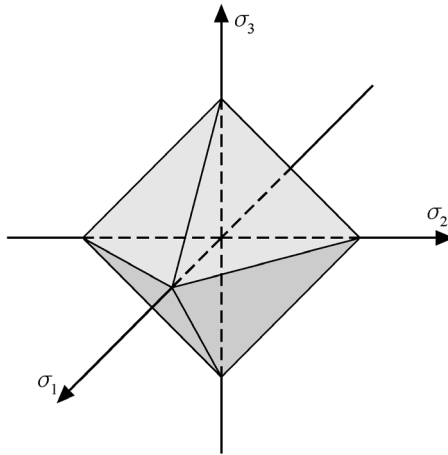


Figura 2.15. Ejes principales y planos octaédricos.

2.8.2. Tensiones octaédricas

Considerando, sin pérdida de generalidad, el plano definido por los valores positivos de los cosenos directores, el vector tensión que actúa sobre dicho plano viene dado por

$$t_1^o = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1, \quad t_2^o = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2, \quad t_3^o = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3$$

La *tensión normal octaédrica* en dicho plano se obtiene como la proyección normal del vector tensión

$$\sigma_o = \mathbf{t}_i^o \cdot \mathbf{n}_i^o = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

mientras que la *tensión tangencial octaédrica* se calcula a partir de la componente tangencial del vector tensión

$$\tau_o = \sqrt{|\mathbf{t}^o|^2 - \sigma_o^2} \quad (2.8.2)$$

donde

$$\sigma_o^2 = \frac{I_1^2}{9}$$

$$|\mathbf{t}^0|^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}{3} = \frac{I_1^2 - 2I_2}{3}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.8.2) se obtiene finalmente

$$\tau_o = \sqrt{\frac{I_1^2 - 2I_2}{3} - \frac{I_1^2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}I_1^2 - \frac{2}{3}I_2}$$

Las tensiones σ_o y τ_o dependen únicamente de los invariantes del tensor de tensiones. Por tanto, ambas son escalares invariantes del estado tensional, lo que significa que pueden calcularse en cualquier sistema de referencia, aunque los planos sobre los que actúan estén definidos geoméricamente en el sistema de ejes principales.

2.8.3. Tensores esférico y desviador

Definidas las tensiones octaédricas, el tensor de tensiones correspondiente a un estado tensional puede descomponerse en la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}^{(d)}$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = -p\mathbf{I} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(d)} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$$

Esta descomposición expresa que todo tensor de tensiones puede separarse en una parte esférica o hidrostática, asociada a la presión media, y una parte desviadora, responsable de las diferencias entre las tensiones principales.

Desde un punto de vista puramente matemático, existen infinitas descomposiciones posibles de un tensor en una parte esférica y otra no esférica. Sin embargo, la descomposición definida por la presión media resulta especialmente significativa, ya que está directamente relacionada con los invariantes del tensor de tensiones y posee una clara interpretación física.

En particular, en materiales continuos isótropos, la parte esférica del tensor de tensiones está asociada al cambio de volumen, mientras que la parte desviadora está vinculada al cambio de forma. Además, numerosos criterios resistentes, entre ellos el criterio de plastificación de von Mises–Hencky–Nadai, establecen el inicio de la plastificación cuando una magnitud asociada al tensor desviador alcanza un determinado valor umbral.

Resulta ilustrativo calcular algunos invariantes de los tensores esférico y desviador

$$\begin{aligned}
I_1^o &= 3\sigma_o = I_1 \\
I_2^o &= 3\sigma_o^2 = \frac{I_1^2}{3} \\
I_1^d &= I_1 - 3\sigma_o = 0 \\
I_2^d &= (\sigma_1 - \sigma_o)(\sigma_2 - \sigma_o) + (\sigma_1 - \sigma_o)(\sigma_3 - \sigma_o) + (\sigma_2 - \sigma_o)(\sigma_3 - \sigma_o) \\
&= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_o(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 3\sigma_o^2 \\
&= I_2 - 2\frac{I_1}{3}I_1 + 3\frac{I_1^2}{9} = I_2 - \frac{I_1^2}{3}
\end{aligned}$$

A partir de estos resultados es inmediato establecer la relación entre las tensiones octaédricas correspondientes al tensor esférico y al tensor desviador con las tensiones octaédricas del estado tensional del que derivan

$$\begin{aligned}
\sigma_o^o &= \sigma_o \\
\tau_o^o &= \sqrt{\frac{2}{9}I_1^{o^2} - 2\frac{I_2^o}{3}} = 0 \\
\sigma_o^d &= \frac{I_1^d}{3} = 0 \\
\tau_o^d &= \sqrt{-\frac{2}{3}I_2^d} = \sqrt{-\frac{2}{3}\left(I_2 - \frac{I_1^2}{3}\right)} = \tau_o
\end{aligned}$$

2.9. Valores extremos de las componentes intrínsecas del vector tensión

La tensión normal que actúa en un punto de un plano cuya normal es el vector unitario $\mathbf{n}$, expresada en función de las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, y de los cosenos directores n_1, n_2, n_3 de dicho vector, viene dada por

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^T \mathbf{n} = [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}]^T \mathbf{n} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (2.9.1)$$

Dado que $\mathbf{n}$ es un vector unitario, sus cosenos directores deben satisfacer la ecuación

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.9.2)$$

Los máximos de la tensión normal se pueden obtener despejando de la ecuación (2.9.2) uno de los cosenos directores, sustituyéndolo en la ecuación (2.9.1),

derivando respecto a los otros dos cosenos directores e igualando a cero las expresiones obtenidas.

Los valores extremos de la tensión normal pueden determinarse planteando un problema de extremos condicionados. Para ello, se elimina uno de los cosenos directores mediante la ecuación (2.9.2), se sustituye en la expresión de σ_n , y se imponen las condiciones de estacionariedad respecto a los cosenos restantes. Despejando n_3 de la ecuación (2.9.2)

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$$

y sustituyendo en la ecuación (2.9.1) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 - \sigma_3 n_1^2 - \sigma_3 n_2^2$$

Derivando respecto de n_1 y n_2 , e igualando a cero, se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} = 2\sigma_1 n_1 - 2\sigma_3 n_1 = 2n_1(\sigma_1 - \sigma_3) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_2} = 2\sigma_2 n_2 - 2\sigma_3 n_2 = 2n_2(\sigma_2 - \sigma_3) = 0$$

La solución de estas ecuaciones, junto con la condición de normalización (2.9.2), conduce a

$$n_1 = 0 \quad n_2 = 0 \quad n_3 = \pm 1$$

Eliminando n_2 o n_1 , en lugar de n_3 , se obtiene las direcciones

$$n_1 = 0 \quad n_2 = \pm 1 \quad n_3 = 0$$

$$n_1 = \pm 1 \quad n_2 = 0 \quad n_3 = 0$$

Como puede observarse, las direcciones obtenidas coinciden con las direcciones principales de tensiones. En consecuencia, los valores máximos y mínimos de la tensión normal se producen en los *planos principales* y dichos valores coinciden con las tensiones principales.

Adoptando el criterio de ordenación $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, la mayor tensión normal corresponde al plano principal 1, mientras que la menor tensión normal corresponde al plano principal 3.

El módulo del vector tensión que actúa sobre un plano de normal $\mathbf{n}$, en función de las tensiones principales y de los cosenos directores, es

$$|\mathbf{t}| = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2}$$

y, teniendo en cuenta la expresión de la tensión normal, ecuación (2.9.1), el módulo de la tensión tangencial puede escribirse como

$$\tau_n = \sqrt{(\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2} \quad (2.9.3)$$

Este valor representa la máxima tensión tangencial que actúa sobre el plano considerado, es decir, la resultante de las componentes tangenciales según cualquier par de direcciones perpendiculares contenidas en dicho plano.

Los valores máximos de la tensión tangencial entre todos los planos que pasan por el punto se obtienen aplicando un procedimiento análogo al utilizado para la tensión normal. Eliminando uno de los cosenos directores mediante la ecuación (2.9.2) sustituyendo en la ecuación (2.9.3) y exigiendo estacionariedad respecto de los cosenos restantes, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} n_1 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] &= 0 \\ n_2 \left[(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Una solución de dicho sistema, junto con la ecuación (2.9.2), es

$$n_1 = 0 \quad n_2 = 0 \quad n_3 = \pm 1$$

la cual corresponde a una dirección principal, para la que la tensión tangencial es nula. Las restantes soluciones no triviales son

$$\begin{aligned} n_1 = 0 \quad n_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad n_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \\ n_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad n_2 = 0 \quad n_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento eliminando alternativamente cada uno de los cosenos directores, se obtienen seis direcciones distintas, recogidas en la tabla 2.1. Sustituyendo dichas direcciones en la ecuación (2.9.3) se obtienen los valores correspondientes de la tensión tangencial, que se muestran en la última fila de la tabla.

De los resultados anteriores se concluye que, mientras que los valores máximos y mínimos de la tensión normal se producen sobre planos perpendiculares a las direcciones principales, los valores extremos de la tensión tangencial se

producen sobre planos cuyas normales coinciden con las bisectrices de las direcciones principales, tomadas dos a dos.

Tabla 2.1. Direcciones y valores de las tensiones tangenciales de valor cero y de valor máximo.

	Direcciones principales			Bisectrices direcciones principales		
	1	2	3	1-2	1-3	2-3
n_1	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0
n_2	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n_3	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
τ_n	0	0	0	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$	$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

En particular, de acuerdo con el criterio de ordenación adoptado, la máxima tensión tangencial absoluta se produce en los planos cuyas normales son las bisectrices entre las direcciones principales 1 y 3, y su valor viene dado por

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

2.10. Representaciones gráficas del tensor de tensiones

El estado tensional en un punto de un sólido puede representarse de diversas formas geométricas y gráficas, cada una de las cuales pone de manifiesto distintos aspectos del tensor de tensiones y resulta especialmente adecuada para determinados análisis.

En este apartado se describen tres de las representaciones más habituales del tensor de tensiones: el elipsoide de tensiones de Lamé, la representación en el espacio de las tensiones principales y los círculos de Mohr.

Estas representaciones permiten visualizar el estado tensional, identificar de forma intuitiva las tensiones principales y las tensiones normales y tangenciales extremas, y facilitan el análisis y la interpretación física de los resultados obtenidos.

2.10.1. Elipsoide de tensiones de Lamé

Sea P un punto interior de un sólido elástico. Si se consideran todos los planos que pasan por dicho punto y, para cada uno de ellos, el vector tensión asociado, el lugar geométrico descrito por los extremos de dichos vectores tensión, al variar la orientación del plano, es un elipsoide denominado *elipsoide de tensiones* o *elipsoide de Lamé*, cuyos ejes coinciden con las direcciones principales del tensor de tensiones.

Para su deducción, se considera un sistema de referencia cartesiano con origen en el punto P y ejes coincidentes con las direcciones principales. Sean x, y, z las coordenadas del extremo del vector tensión $\mathbf{t}$ correspondiente a un plano cuya normal unitaria es $\mathbf{n}$. Si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son las tensiones principales, la fórmula de Cauchy permite escribir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene

$$x = \sigma_1 n_1, \quad y = \sigma_2 n_2, \quad z = \sigma_3 n_3 \quad (2.10.1)$$

Teniendo en cuenta que el vector normal $\mathbf{n}$ es vector unitario, se cumple

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Sustituyendo las relaciones (2.10.1) se obtiene finalmente la ecuación

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

que es la ecuación de un elipsoide referido a unos ejes con origen en P (figura 2.16). Los semiejes del elipsoide coinciden con las direcciones principales y sus longitudes son los valores absolutos de las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Cuando dos de las tensiones principales son iguales, el elipsoide degenera en un elipsoide de revolución. Cuando las tres tensiones principales son iguales, el elipsoide se convierte en una esfera, correspondiendo a un estado de tensiones hidrostático, en el que cualquier dirección del espacio es una dirección principal.

El elipsoide de Lamé proporciona una representación geométrica directa del estado tensional en un punto, permitiendo visualizar de forma inmediata las direcciones principales y los valores relativos de las tensiones normales asociadas a los distintos planos.

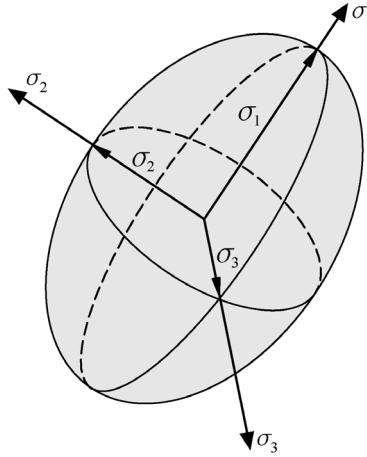


Figura 2.16. Elipsoide de tensiones de Lamé.

2.10.2. Representación en el espacio de las tensiones principales

Sea un sistema de referencia principal, en el que las componentes del tensor de tensiones vienen dadas por las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. En este espacio, un punto Q representa un estado tensional arbitrario.

La descomposición del tensor de tensiones introducida en el apartado 2.7, en sus partes esférica y desviadora, puede representarse en este espacio mediante *pseudovectores*, tal y como se muestra en la figura 2.17,

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{Q'Q}$$

donde

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ'} = \begin{bmatrix} \sigma_o \\ \sigma_o \\ \sigma_o \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{Q'Q} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_o \\ \sigma_2 - \sigma_o \\ \sigma_3 - \sigma_o \end{bmatrix}$$

El pseudovector $\overrightarrow{OQ'}$, que representa la parte esférica del estado tensional, se encuentra situado sobre la diagonal principal del sistema de ejes principales. Por su parte, el pseudovector $\overrightarrow{Q'Q}$, que representa la parte desviadora, es perpendicular a dicha diagonal.

En efecto, el producto escalar entre ambos vectores es nulo

$$\overrightarrow{OQ'} \cdot \overrightarrow{Q'Q} = \begin{bmatrix} \sigma_o & \sigma_o & \sigma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_o \\ \sigma_2 - \sigma_o \\ \sigma_3 - \sigma_o \end{bmatrix} = \sigma_o (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3\sigma_o^2 = 0$$

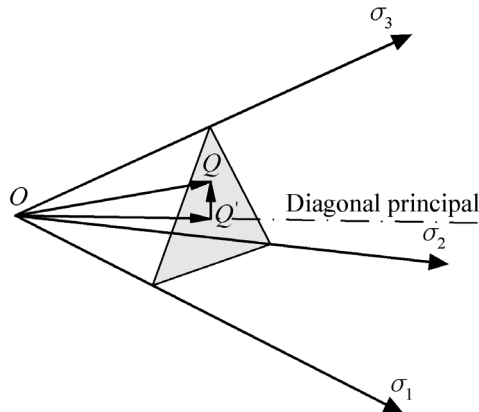


Figura 2.17. Descomposición de un tensor en sus partes esférica y desviadora en el espacio de las tensiones principales.

Debe observarse que la descomposición de un tensor de tensiones en una parte esférica y otra complementaria no es, desde un punto de vista puramente matemático, única. Sin embargo, únicamente cuando la parte esférica se define a partir de la presión media (o, equivalentemente, de las tensiones del plano octaédrico), la parte restante -el tensor desviador- tiene una representación geométrica mediante un pseudovector estrictamente perpendicular a la diagonal principal del sistema de tensiones principales. Esta propiedad confiere a dicha descomposición un carácter privilegiado y un significado físico claro.

La representación en el espacio de tensiones principales, también conocida como *representación de Haigh-Westergaard*, consiste en proyectar el estado tensional sobre un plano perpendicular a la diagonal principal (figura 2.18), obteniendo de este modo una representación bidimensional del estado tensional.

En esta representación, la parte esférica del estado tensional queda proyectada en el origen, mientras que la parte desviadora aparece representada en verdadera magnitud, como consecuencia directa de la ortogonalidad entre los pseudovectores esférico y desviador.

Es importante destacar que un único punto en el plano de Haigh-Westergaard representa infinitos estados tensionales distintos, todos ellos caracterizados por el mismo tensor desviador, pero con diferentes valores de la parte esférica. Este hecho explica cómo un estado tensional tridimensional puede representarse en un plano: la información asociada al tensor esférico ha sido

eliminada deliberadamente.

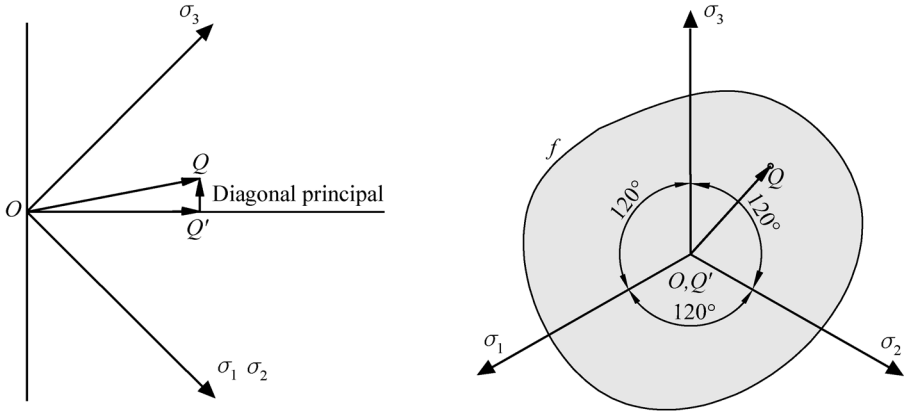


Figura 2.18. Representación de Haigh-Westergaard.

La representación de Haigh–Westergaard carecería de interés si la parte esférica del tensor de tensiones tuviera un papel relevante en el fenómeno que se desea analizar. Sin embargo, existen numerosos problemas de interés práctico en los que el comportamiento del material depende exclusivamente del tensor desviador. Es el caso, por ejemplo, de conjuntos de estados tensionales cuyos tensores desviadores tienen módulo inferior a un cierto valor, o de estados tensionales cuyas tensiones tangenciales máximas no superan un umbral determinado.

Para este tipo de situaciones, entre las que se incluyen los *criterios de plasticación*, la representación de Haigh–Westergaard resulta especialmente útil. Dichos criterios se estudiarán con mayor detalle en el capítulo correspondiente.

2.10.3. Los círculos de Mohr

Fundamentos de los círculos de Mohr

Mediante el procedimiento que se desarrolla a continuación es posible representar gráficamente, en un plano, las componentes intrínsecas -normal y tangencial- del vector tensión correspondientes a los infinitos planos que pasan por un punto.

En lo que sigue se adopta la convención $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, de modo que las diferencias entre tensiones principales son no negativas.

En este análisis, las componentes intrínsecas se consideran mediante sus valores escalares: la tensión normal σ_n y el valor escalar (con signo) de la tensión tangencial τ_n . Estas magnitudes serán las que se representen gráficamente en el

plano de los círculos de Mohr.

El vector tensión en un punto P , correspondiente a un plano cuya normal unitaria es $\mathbf{n}$, y referido al sistema de direcciones principales, viene dado por

$$\mathbf{t} = [\sigma_1 n_1 \quad \sigma_2 n_2 \quad \sigma_3 n_3]^T$$

Calculando el módulo del vector $\mathbf{t}$ y elevándolo al cuadrado, se obtiene

$$|\mathbf{t}|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2.10.2)$$

Por otra parte, el módulo de la tensión normal viene dado por

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (2.10.3)$$

y los cosenos directores del vector normal satisfacen la condición de normalización

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.10.4)$$

El sistema formado por las ecuaciones (2.10.2), (2.10.3) y (2.10.4) permite estudiar la variación de las componentes normal y tangencial del vector tensión al variar la orientación del plano.

El signo de la tensión tangencial τ_n viene determinado por la convención adoptada en la construcción del círculo de Mohr y no constituye una propiedad intrínseca del estado tensional.

Variación para un coseno director constante

Si se fija uno de los cosenos directores, por ejemplo $n_1 = \text{cte.}$, lo que equivale a hacer variar la normal $\mathbf{n}$ según las generatrices de un cono de revolución de eje la dirección principal 1 (figura 2.19), el sistema anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 &= \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_1^2 n_1^2 \\ \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 &= \sigma_n - \sigma_1 n_1^2 \\ n_2^2 + n_3^2 &= 1 - n_1^2 \end{aligned}$$

Para que este sistema homogéneo admita soluciones distintas de la trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse

$$\begin{vmatrix} \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_1^2 n_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_n - \sigma_1 n_1^2 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 - n_1^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

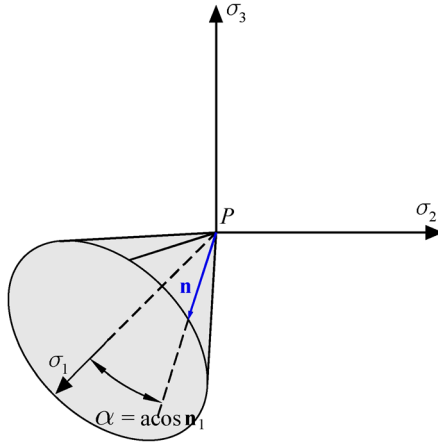


Figura 2.19. Variación del vector $\mathbf{n}$ para α constante.

Desarrollando este determinante por los elementos de la primera columna y dividiendo por $(\sigma_2 - \sigma_3)$ se obtiene la ecuación de una familia de circunferencias concéntricas

$$C_1: \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 + n_1^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$$

Estas circunferencias tienen su centro común en el punto O_1 , cuyas coordenadas $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)^1$ representan la tensión normal media. Dicho punto se define en un sistema cartesiano en el que el eje de abscisas corresponde a la tensión normal σ_n y el eje de ordenadas a la tensión tangencial τ_n .

Para $n_1 = 0$, la ecuación se reduce a

$$C_1: \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 = 0$$

Esta circunferencia corta al eje σ en dos puntos diametralmente opuestos, de abscisas σ_2 y σ_3 , por lo que su radio es $R_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$.

Procediendo mediante un razonamiento análogo para $n_2 = \text{cte.}$, se obtiene la familia de circunferencias

¹ Desarrollando la ecuación de una circunferencia $(\sigma_n - a)^2 + (\tau_n - b)^2 = R^2$ e identificando componentes, $b \equiv 0$, $a = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$.

$$C_2: \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3 + n_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3) = 0$$

que para $n_2 = 0$, se reduce a

$$C_2: \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3 = 0$$

correspondiente a una familia de circunferencias con centro en el punto O_2 de coordenadas $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$, y radio $R_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Finalmente, haciendo $n_3 = \text{cte.}$, se obtiene

$$C_3: \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 + n_3^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) = 0$$

que para $n_3 = 0$, se reduce a

$$C_3: \sigma_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 = 0$$

correspondiente a una familia de circunferencias con centro en el punto O_3 de coordenadas $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$, y radio $R_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Interpretación global

El desarrollo precedente permite considerar todas las posibles orientaciones de los infinitos planos que pasan por el punto P . La figura 2.20 representa en el plano σ_n, τ_n los valores de las componentes normal y tangencial del vector tensión para cualquier orientación del plano.

Los tres círculos obtenidos se denominan *círculos de Mohr*. Se demuestra que cualquier punto representativo del vector tensión correspondiente a una orientación arbitraria del plano se encuentra en el interior del círculo mayor y en el exterior a los dos círculos menores.

Los círculos de Mohr proporcionan así una representación gráfica completa del estado tensional en un punto, permitiendo determinar de forma inmediata las tensiones normales y tangenciales correspondientes a cualquier plano, así como identificar los valores extremos de ambas magnitudes.

Aplicaciones de los círculos de Mohr

Los círculos de Mohr permiten resolver de forma gráfica numerosos problemas relacionados con el estado tensional en un punto. Entre las aplicaciones más habituales se encuentran:

- a) la determinación de las componentes intrínsecas del vector tensión a

partir de los ángulos (o cosenos directores) de la normal al plano, y

- b) la determinación de la orientación del plano (ángulos o cosenos directores de su normal) a partir de las componentes intrínsecas del vector tensión.

a) Determinación de las componentes intrínsecas del vector tensión a partir de la orientación del plano

Conocidos los ángulos que la normal a un plano forma con las direcciones principales, es posible determinar gráficamente las componentes intrínsecas del vector tensión correspondiente a dicho plano (Figura 2.20).

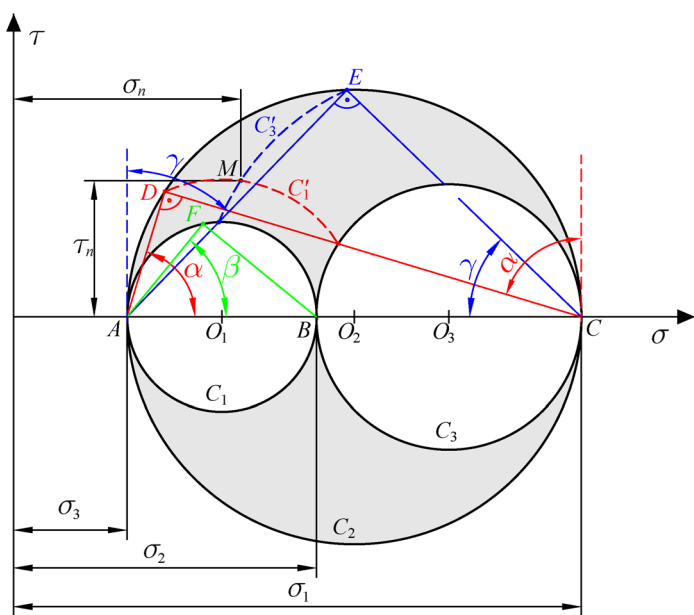


Figura 2.20. Determinación de las componentes intrínsecas.

El procedimiento operativo es el siguiente.

1. Se calculan previamente las tensiones principales y se trazan los tres círculos de Mohr.
2. Por la vertical correspondiente a la tensión principal σ_1 se traza una recta que forma con la vertical el ángulo $\alpha = \text{acos}(\mathbf{n}_1)$, interceptando a la circunferencia exterior C_2 en el punto D .
3. De manera análoga, por la vertical correspondiente a la tensión principal σ_3 se traza una recta que forma el ángulo $\gamma = \text{acos}(\mathbf{n}_3)$ con la vertical, que corta a la misma circunferencia en el punto E .

- El punto M de intersección de las circunferencias, centradas en O'_1 y O'_3 y que pasan respectivamente por D y E , proporcionan las coordenadas intrínsecas σ_n, τ_n del vector tensión correspondiente al plano considerado.

El mismo resultado puede obtenerse empleando cualquier otra pareja de ángulos entre la normal al plano y dos direcciones principales.

b) Determinación de los ángulos (o cosenos directores) de la normal a un plano con los planos principales, conocidas las componentes intrínsecas del vector tensión

Conocidas las componentes intrínsecas del vector tensión, representadas por el punto M en el diagrama de Mohr, es posible determinar gráficamente los ángulos que la normal al plano correspondiente forma con las direcciones principales (figura 2.21).

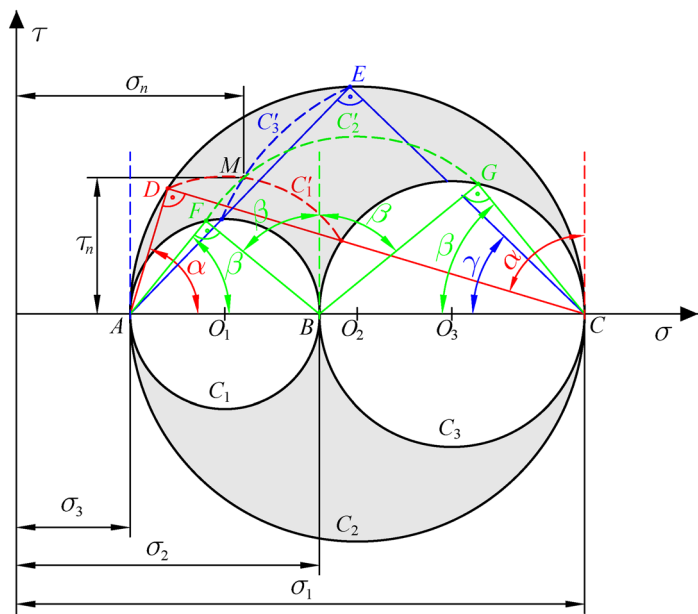


Figura 2.21. Determinación de los ángulos del vector normal con los ejes principales.

El procedimiento operativo es el siguiente.

- Se calculan las tensiones principales y se trazan los tres círculos de Mohr.
- Se posiciona en el diagrama el punto M mediante las coordenadas intrínsecas σ_n, τ_n del vector tensión.
- Se traza un arco de circunferencia C'_1 , paralelo a C_1 , que pase por el punto

M y se obtiene el punto D de intersección con la circunferencia C_2 . El ángulo α que forma la normal al plano con la dirección principal asociada a σ_1 , es el ángulo de la recta DC con la vertical por C , o, de forma equivalente, el ángulo BAD .

4. De manera análoga, se traza un arco de circunferencia C'_3 paralelo a C_3 que pase por el punto M , obteniéndose el punto E . El ángulo γ se determina como el ángulo que forma la recta correspondiente σ_3 con la vertical por el centro adecuado, o equivalentemente como el ángulo BCE .
5. Para la tensión principal intermedia σ_2 , se traza un arco de circunferencia C'_2 , paralelo a C_2 que pase por el punto M , y se obtienen los puntos F y G , a partir de los cuales se determina el ángulo β .

Conocidos dos de los ángulos, y por tanto dos cosenos directores de la normal al plano, el tercero se obtiene imponiendo la condición de que dicho vector normal es unitario.

En la figura 2.22 se muestra una construcción alternativa, basada en los ángulos dobles asociados a las aperturas de los conos de direcciones normales, que permite facilitar la determinación gráfica de la orientación del plano o, alternativamente, de las componentes intrínsecas del vector tensión.

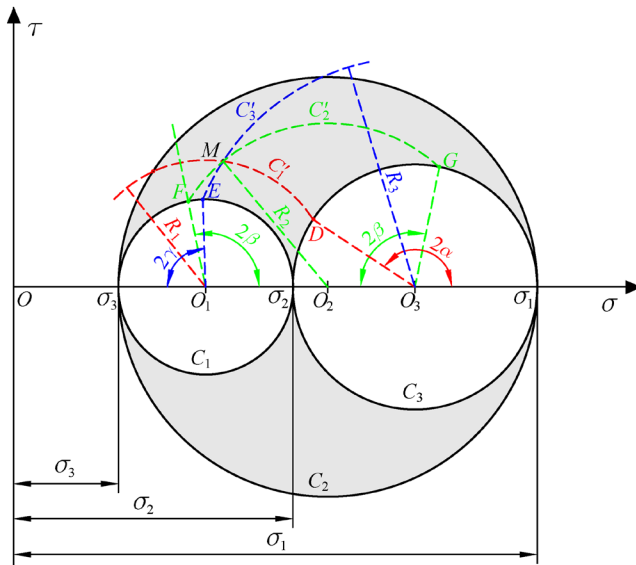


Figura 2.22. Determinación alternativa de los ángulos dobles o de las componentes intrínsecas.

Ejemplo 2.4. Círculos de Mohr: determinación de componentes intrínsecas

Se conoce la matriz del tensor de tensiones en un sistema cartesiano.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. El vector tensión correspondiente al plano cuyo vector normal es la dirección que forma el mismo ángulo con los tres semiejes positivos.
2. Las componentes intrínsecas del vector tensión del apartado 1. Deben calcularse de forma gráfica y de forma analítica.
3. La tensión tangencial máxima y el plano en el que actúa.

Solución

1. Vector tensión correspondiente al plano cuyo vector normal es la dirección que forma el mismo ángulo con los tres semiejes positivos

$$\left. \begin{matrix} n_x = n_y = n_z \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow n_x = n_y = n_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

2. Componentes intrínsecas del vector tensión del apartado 1
 - Cálculo analítico

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = 5$$

$$\tau_n = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\left[(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2\right] - 5^2} = \sqrt{2} = 1,4142$$

- Cálculo gráfico

Para obtener las componentes intrínsecas de la tensión es necesario, en primer lugar, calcular las tensiones principales para poder dibujar los círculos de Mohr, y, en segundo lugar, obtener los ángulos que forma la normal al plano con los ejes principales para poder posicionar el punto en el sistema de coordenadas σ_n, τ_n .

Las tensiones y direcciones principales del tensor de tensiones, obtenidas en el ejercicio 2.3, son

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 6 \quad \mathbf{n}^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 1]^T \\ \sigma_2 &= 5 \quad \mathbf{n}^{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \quad 0 \right]^T \\ \sigma_3 &= 0 \quad \mathbf{n}^{(3)} = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad 0 \right]^T\end{aligned}$$

A partir de las tensiones principales se dibujan los círculos de Mohr de la figura 2.23.

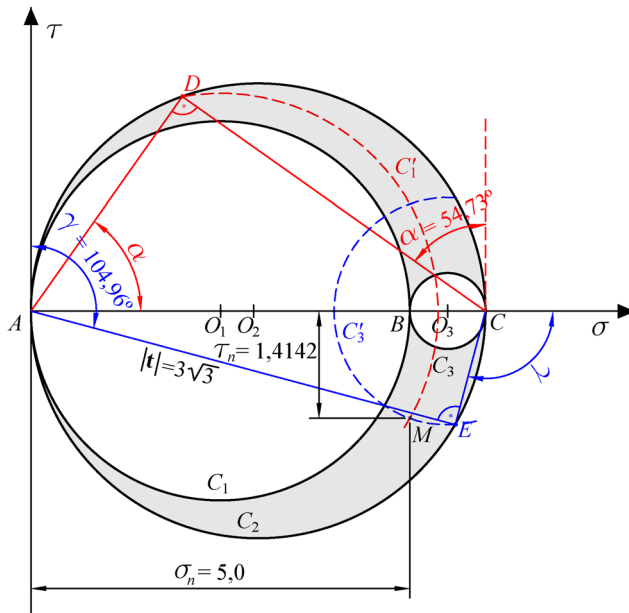


Figura 2.23. Cálculo gráfico mediante los círculos de Mohr.

Para posicionar el punto en el sistema de coordenadas σ_n, τ_n hay que obtener

los ángulos que la normal unitaria al plano forma con los ejes principales (al menos con 2).

El ángulo entre la normal unitaria al plano y el eje principal 1 es

$$\cos \alpha = n_x n_x^{(1)} + n_y n_y^{(1)} + n_z n_z^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} 1 = 0,5773$$

$$\alpha = \arccos(0,5773) = 54,73^\circ$$

y el ángulo entre la normal unitaria al plano y el eje principal 3 es

$$\cos \gamma = n_x n_x^{(3)} + n_y n_y^{(3)} + n_z n_z^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} 0 = -0,2582$$

$$\gamma = \arccos(-0,2582) = 104,96^\circ$$

3. Tensión tangencial máxima y el plano en el que actúa

La tensión tangencial máxima es la que corresponde al punto D de la figura 2.24, cuyo valor es

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{6 - 0}{2} = 3,0$$

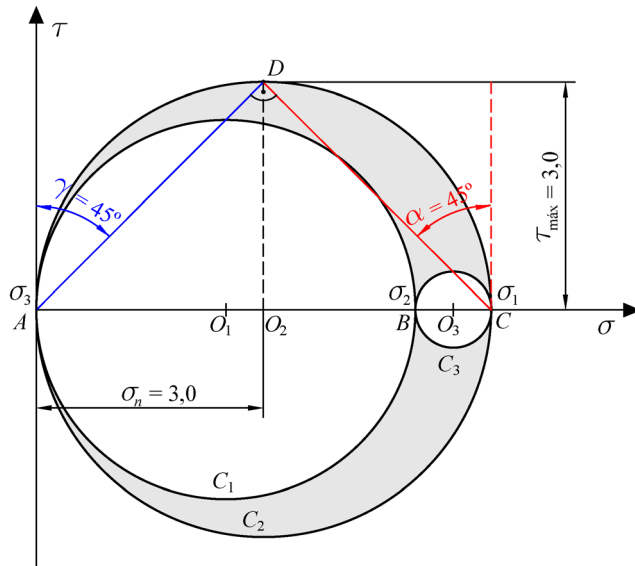


Figura 2.24. Círculos de Mohr. Tensión tangencial máxima y ángulos α y γ entre el vector tensión y los ejes principales 1 y 3.

$$n_1 = \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_3 = \cos \gamma = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(n_2)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \beta = \arccos(0) = 90^\circ$$

El plano de tensión tangencial máxima es el que tiene un vector normal cuyos cosenos directores en los ejes principales son

$$\mathbf{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T$$

Este vector normal corresponde a un plano que contiene a la dirección principal 2 y a la diagonal de las direcciones principales 1 y 3 (figura 2.25).

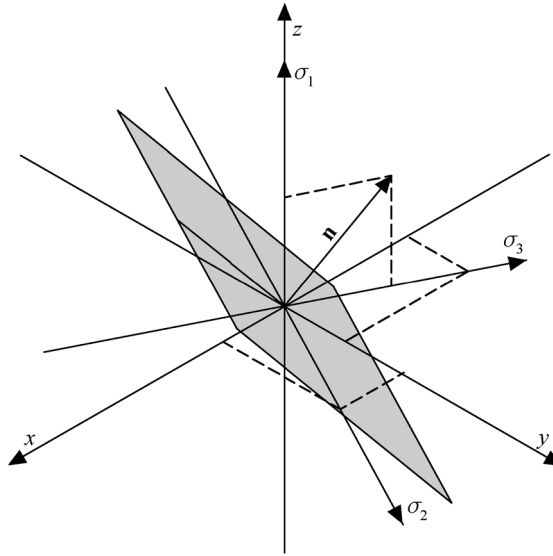


Figura 2.25. Ejes cartesianos, ejes principales, vector normal y plano de tensión tangencial máxima.

2.11. Cierre del capítulo

En este capítulo se ha desarrollado de forma sistemática el concepto de tensión en un sólido elástico, partiendo de la identificación de las fuerzas que actúan

sobre el contorno y el interior del sólido y culminando en la representación gráfica del estado tensional mediante los círculos de Mohr.

A partir del aislamiento de una porción infinitesimal del sólido y del análisis de las fuerzas que actúan sobre su contorno, se ha definido el vector tensión como la fuerza por unidad de superficie asociada a un plano que pasa por un punto del sólido. La dependencia del vector tensión con la orientación del plano ha conducido, mediante la fórmula de Cauchy, a la introducción del tensor de tensiones, que constituye la descripción completa del estado tensional en un punto.

El establecimiento de las ecuaciones de equilibrio interno ha permitido demostrar que el tensor de tensiones es simétrico y que, en consecuencia, el estado tensional queda completamente determinado por seis componentes independientes. Este resultado ha hecho posible definir conceptos fundamentales como las tensiones y direcciones principales, los invariantes del tensor de tensiones y la descomposición del tensor en sus partes esférica y desviadora, cuyo significado físico se ha analizado con detalle.

Se han introducido asimismo magnitudes invariantes particularmente relevantes, como las tensiones octaédricas, y se ha puesto de manifiesto el papel central del tensor desviador en aquellos fenómenos mecánicos en los que la respuesta del material depende esencialmente del estado de cortadura, anticipando su importancia en el estudio de los criterios de plastificación.

Finalmente, se han presentado distintas representaciones gráficas del estado tensional -el elipsoide de tensiones de Lamé, la representación en el espacio de las tensiones principales (Haigh-Westergaard) y los círculos de Mohr. A través de los círculos de Mohr se ha mostrado cómo es posible determinar gráficamente las tensiones normales y tangenciales que actúan sobre cualquier plano, así como resolver problemas inversos relativos a la orientación del plano a partir del estado tensional.

Con ello, el capítulo proporciona una base sólida, tanto conceptual como operativa, para el análisis del comportamiento mecánico de los sólidos, sirviendo de soporte esencial para el estudio posterior de la deformación, la resistencia de materiales y los criterios de fallo.

Resumen conceptual

- Las fuerzas sobre un sólido se modelan, en la mecánica del continuo clásica, mediante fuerzas por unidad de volumen y fuerzas por unidad de superficie.

- El vector tensión representa la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre un plano que pasa por un punto del sólido y depende tanto del punto como de la orientación del plano.
- La fórmula de Cauchy establece que el vector tensión sobre un plano de normal $\mathbf{n}$ se obtiene multiplicando el tensor de tensiones por dicho vector normal.
- El tensor de tensiones es un tensor simétrico de segundo orden que describe completamente el estado tensional en un punto mediante seis componentes independientes.
- Las ecuaciones de equilibrio interno vinculan las derivadas espaciales de las tensiones con las fuerzas de volumen y conducen a la simetría del tensor de tensiones.
- Las tensiones principales son los valores propios del tensor de tensiones y actúan sobre planos en los que no existen tensiones tangenciales; las direcciones asociadas son ortogonales entre sí.
- Los invariantes del tensor de tensiones son magnitudes escalares independientes del sistema de referencia y caracterizan de forma intrínseca el estado tensional.
- El tensor de tensiones puede descomponerse de forma única en una parte esférica (hidrostática) y una parte desviadora, con claras implicaciones físicas en materiales isótropos.
- Las tensiones octaédricas son invariantes del estado tensional y están directamente relacionadas con los invariantes del tensor y con la parte desviadora.
- Los valores máximos y mínimos de la tensión normal se producen sobre planos principales, mientras que los máximos de la tensión tangencial se producen sobre planos situados entre direcciones principales.
- Las representaciones gráficas:
 - el elipsoide de Lamé,
 - el espacio de tensiones principales (Haigh-Westergaard), y
 - los círculos de Mohr,

permiten visualizar e interpretar el estado tensional desde distintos puntos de vista. Los círculos de Mohr constituyen una herramienta gráfica fundamental para determinar tensiones sobre planos arbitrarios y la orientación de dichos planos a partir de las tensiones.

Problemas propuestos

Problema 2.1. El prisma oblicuo de la figura 2.26 tiene sus caras opuestas paralelas; el ángulo AOC es $\alpha = 50^\circ$. Sobre las caras $OABC$ y $DFGH$ actúa una tracción uniforme paralela a OD de valor $0,15q$. Sobre las caras $ABGF$ y $OCHD$ actúa una tracción uniforme paralela a OA de valor $0,05q$. Sobre las otras dos caras $OAFD$ y $CBGH$, actúa una tracción uniforme, paralela a OC , de valor $0,1q$.

Se pide:

1. Determinar el tensor de tensiones en el interior del prisma.

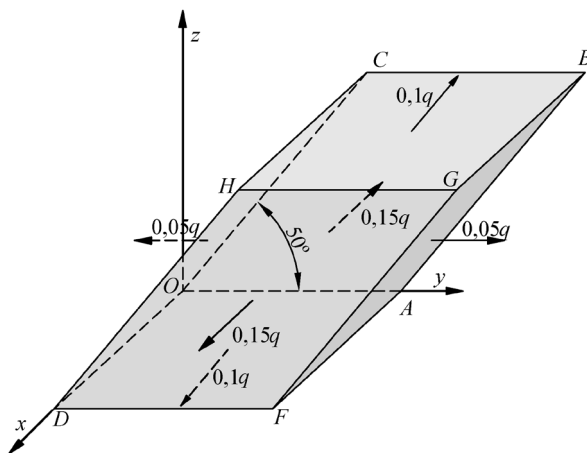


Figura 2.26. Problema 2.1.

Problema 2.2. En un punto de un cuerpo sometido a un estado plano de tensión se conocen las tensiones sobre los planos AB y CD que se indican en la figura 2.27.

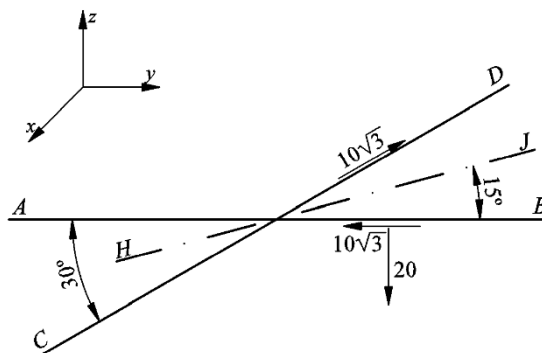


Figura 2.27. Problema 2.2.

Se pide:

1. Determinar el tensor de tensiones en el sistema de coordenadas cartesiano xy .
2. Determinar la tensión sobre el plano HJ bisector de los planos AB y CD .
3. Determinar las componentes intrínsecas del vector tensión en el plano bisector.

Problema 2.3. Se conoce la matriz cartesiana del tensor de tensiones en un punto

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x^2y & -2x & \tau_{zx} \\ -2x & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. Encontrar una posible configuración de equilibrio de este, si el vector de fuerzas por unidad de volumen es $\mathbf{b} = [-xy \ 0 \ 7yz]^T$.
2. Obtener, en el punto $(1,1,1)$, el vector tensión en el plano cuya normal forma ángulos iguales con los tres ejes del sistema de coordenadas.
3. Obtener las componentes intrínsecas del vector tensión del punto 2, y los vectores tensión normal y tensión tangencial.

Problema 2.4. Se conoce la matriz cartesiana del tensor de tensiones en un punto

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. El vector tensión en el plano definido por el eje z y la bisectriz de los ejes x, y .
2. El vector tensión sobre un plano cuyo vector normal unitario es $\mathbf{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T$.
3. El tensor de tensiones, en un sistema de coordenadas $x'y'$ tal que el eje x' coincida con la bisectriz de los ejes x, y , el eje y' coincida con la normal al

plano definido por el eje z , y la bisectriz de los ejes x, y y el eje z' coincide con el eje z .

Problema 2.5. Se conoce la matriz cartesiana del tensor de tensiones en un punto

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1. Las tensiones y direcciones principales.
2. La tensión tangencial máxima y los planos en que se produce.
3. Los planos de tensión normal nula. Obtener el valor de la tensión tangencial en dichos planos.
4. Dibujar los círculos de Mohr y determinar los cosenos directores de un plano que pasa por P , y respecto al cual las componentes intrínsecas del vector tensión son $\sigma = 1, \tau = 2,828$.

Problema 2.6. Se conoce el estado tensional tridimensional de la figura 2.28.

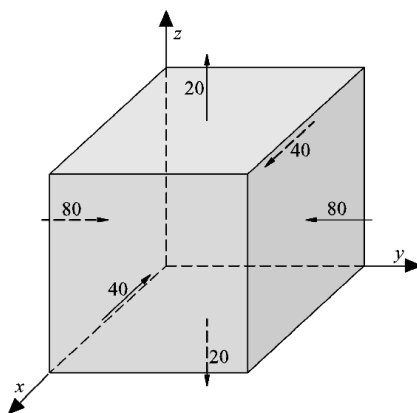


Figura 2.28. Problema 2.6.

Se pide:

1. Las tensiones tangenciales máximas.
2. Las componentes intrínsecas del vector tensión, y el módulo del vector tensión, para un plano que contiene al eje principal 1 y $\beta = 30^\circ$.

3. Las componentes intrínsecas del vector tensión, y el módulo del vector tensión, para un plano que contiene al eje principal 2 y $\alpha = -60^\circ$.
4. Las componentes intrínsecas del vector tensión, y el módulo del vector tensión, para un plano que contiene al eje principal 3 y $\alpha = 30^\circ$.

Problema 2.7. Se conoce el estado tensional tridimensional de la figura 2.29, correspondiente a un punto de un sólido deformable.

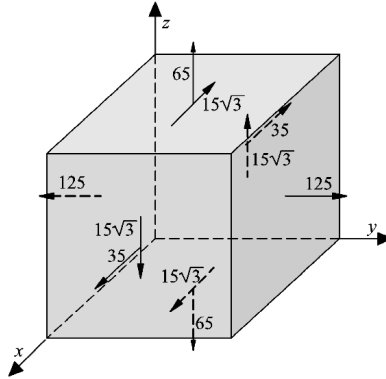


Figura 2.29. Problema 2.7.

Se pide:

1. Obtener el plano, si existe, cuya normal está contenida en el plano xy , y en que la tensión tangencial es nula.

Problema 2.8. Se conoce el estado tensional tridimensional de la figura 2.30, correspondiente a un punto de un sólido deformable.

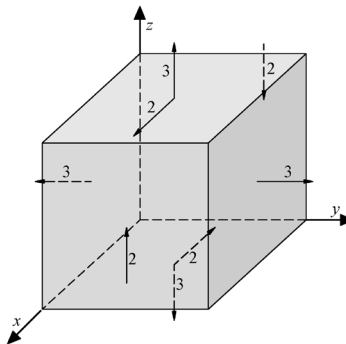


Figura 2.30. Problema 2.8.

Se pide:

1. Obtener los tensores esférico y desviador.
2. Representar el estado de tensiones en el espacio de Haigh-Westergaard.

Problema 2.9. Se conoce el estado tensional en un punto de un sólido elástico (material homogéneo e isótropo) a través de sus tensiones principales $\sigma_1 = 140, \sigma_2 = 100, \sigma_3 = 80$ MPa. Se conoce, también, que el módulo del vector tensión, correspondiente a un plano cuyo vector normal forma un ángulo de 13° con él, es 110 MPa.

Se pide:

1. Determinar los cosenos directores del vector unitario normal al plano.

Problema 2.10. En un punto de un sólido elástico se conocen las tensiones principales $\sigma_1 = 110, \sigma_3 = 20$ MPa y el módulo del vector tensión $|\mathbf{t}| = 75$ MPa en un plano. La normal al plano considerado está sobre un cono de abertura 120° y su eje es el eje σ_1 , (figura 2.31a) y forma un ángulo de 30° con el vector tensión (figura 2.31b).

Se pide:

1. Calcular la tensión principal σ_2 mediante la aplicación de las construcciones gráficas de los círculos de Mohr.

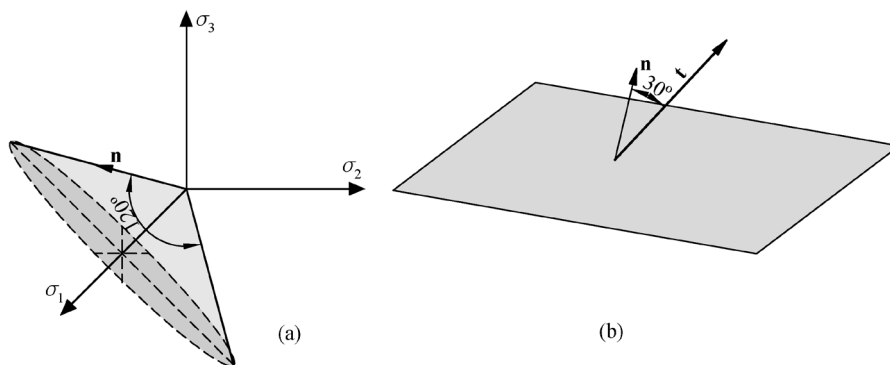


Figura 2.31. Problema 2.10.

Preguntas de evaluación

1. ¿Qué representa físicamente el vector tensión en un punto de un sólido?
 - a) La fuerza total que actúa sobre una superficie finita.
 - b) La fuerza por unidad de volumen que actúa en el punto considerado.
 - c) La fuerza por unidad de superficie asociada a un plano que pasa por el punto.
 - d) La resultante de todas las fuerzas exteriores aplicadas al sólido.
2. En el interior de un sólido, el vector tensión en un punto depende:
 - a) Únicamente del punto considerado.
 - b) De la orientación del sistema de referencia.
 - c) Del punto y de la orientación del plano considerado.
 - d) Exclusivamente de las fuerzas exteriores aplicadas.
3. La fórmula de Cauchy establece que el vector tensión sobre un plano de normal $\mathbf{n}$ es:
 - a) El producto escalar del tensor de tensiones y el vector $\mathbf{n}$.
 - b) La traza del tensor de tensiones multiplicada por $\mathbf{n}$.
 - c) El producto del tensor de tensiones por el vector normal $\mathbf{n}$.
 - d) El gradiente del campo de tensiones en la dirección $\mathbf{n}$.
4. La simetría del tensor de tensiones en la mecánica del sólido deformable clásica se deduce a partir de:
 - a) La isotropía del material.
 - b) Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.
 - c) Las relaciones constitutivas del material.
 - d) Las ecuaciones de equilibrio de momentos.
5. Las tensiones principales en un punto se definen como:
 - a) Las tensiones máximas de tracción y compresión actuando en el sólido.
 - b) Las tensiones normales que actúan sobre cualquier plano arbitrario.
 - c) Los valores propios del tensor de tensiones.
 - d) Las componentes cartesianas del vector tensión.
6. ¿En qué planos la tensión tangencial es nula?
 - a) En los planos octaédricos.
 - b) En los planos principales.
 - c) En los planos bisectores entre direcciones principales.
 - d) En los planos perpendiculares a la dirección de máxima cortadura.

7. Los invariantes del tensor de tensiones se caracterizan porque:
 - a) Dependen del sistema de coordenadas elegido.
 - b) Son funciones únicamente de las tensiones tangenciales.
 - c) Permanecen constantes frente a rotaciones del sistema de referencia.
 - d) Solo existen en materiales isótropos.
8. La parte esférica del tensor de tensiones representa:
 - a) El estado tensional responsable exclusivamente del cambio de forma.
 - b) El estado tensional responsable exclusivamente del cambio de volumen.
 - c) El conjunto de tensiones tangenciales máximas.
 - d) La parte del tensor asociada a la anisotropía del material.
9. Los valores máximos de la tensión tangencial en un punto se producen en planos:
 - a) Principales.
 - b) Octaédricos.
 - c) Cuyas normales coinciden con las bisectrices entre direcciones principales.
 - d) Perpendiculares a la dirección de máxima tensión normal.
10. En la representación mediante los círculos de Mohr, cualquier punto representativo de un estado tensional para una orientación arbitraria del plano:
 - a) Se sitúa siempre sobre uno de los círculos.
 - b) Se sitúa fuera de todos los círculos.
 - c) Se encuentra en el interior del círculo mayor y en el exterior de los dos menores.
 - d) Coincide necesariamente con una tensión principal.