

LA PIEZA RECTA.

ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO

1. Momentos de empotramiento perfecto

1.1. Pieza empotrada en ambos extremos

Sea la pieza ij de la figura 1, que tiene impedidos los giros y los desplazamientos en ambos extremos. El número de reacciones incógnitas es de seis (dos momentos y cuatro fuerzas). Como el número de ecuaciones de equilibrio que pueden plantearse es de tres ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_z = 0$), el grado de hiperestaticidad es de tres. De las tres ecuaciones de compatibilidad necesarias para resolver el problema, la ecuación asociada a las deformaciones axiales de la pieza se puede obtener a partir de la ley de Hooke. Las ecuaciones asociadas a las deformaciones de flexión de la pieza se pueden obtener a partir del teorema de las fuerzas virtuales, de los teoremas de Mohr, del segundo teorema de Castigliano, etc.

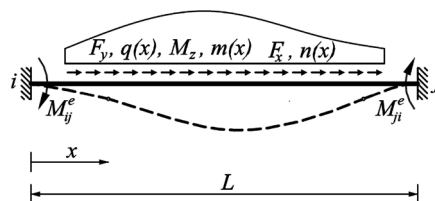


Figura 1. Pieza empotrada-empotrada. Momentos de empotramiento perfecto.

Puesto que las deformaciones axiales dependen, exclusivamente, de la proyección de las cargas exteriores sobre el eje longitudinal de la pieza, se puede descomponer el problema en dos, uno en el que se consideran las fuerzas en la dirección del eje longitudinal de la pieza y otro en el que se consideran las fuerzas perpendiculares al eje y los momentos.

En el segundo problema, el número de incógnitas hiperestáticas es de dos. Adoptando los momentos de empotramiento perfecto (M_{ij}^e, M_{ji}^e) como incógnitas hiperestáticas, el problema de la figura 1 se puede descomponer en los dos problemas isostáticos de la figura 2, con la condición adicional de que los giros totales en ambos extremos de la pieza sean cero

$$\begin{aligned}\theta_{ij} &= \theta'_{ij} + \theta''_{ij} = \theta_i = 0, \\ \theta_{ji} &= \theta'_{ji} + \theta''_{ji} = \theta_j = 0.\end{aligned}\quad [1]$$

Superponiendo las leyes de momentos flectores de los dos casos isostáticos de la figura 2, la ley de momentos flectores total es

$$M(x) = M_i(x) + M_{ij}^e - \frac{M_{ij}^e + M_{ji}^e}{L}x = M_i(x) + \frac{M_{ij}^e}{L}(L-x) - \frac{M_{ji}^e}{L}x. \quad [2]$$

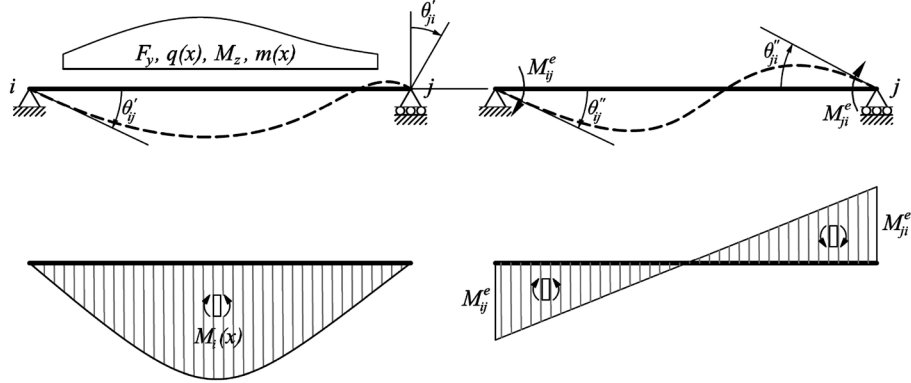


Figura 2. Diagramas de momentos flectores de los dos problemas isostáticos.

Para imponer las condiciones de compatibilidad [1] se utiliza el TFCV. Se aplican momentos virtuales unitarios en los extremos de la pieza (figura 3) y se obtienen los diagramas de momentos flectores correspondientes.

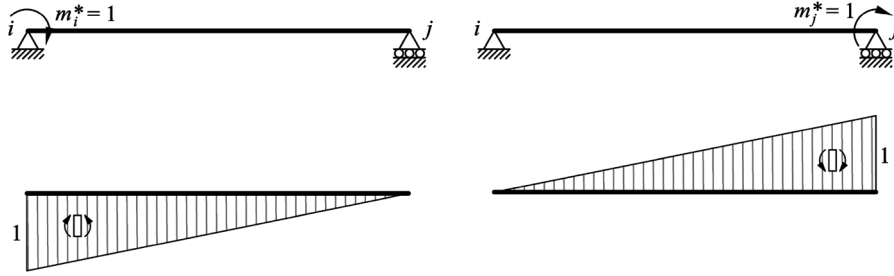


Figura 3. Momentos virtuales y diagramas de momentos flectores virtuales.

Las leyes de momentos flectores virtuales son

$$M_i^*(x) = \frac{L-x}{L}, \quad M_j^*(x) = -\frac{x}{L}.$$

Aplicando el TFCV en cada uno de los extremos de la pieza se obtiene

$$\begin{aligned}1 \cdot \theta_{ij} &= \int_0^L \frac{M(x)M_i^*(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^L M(x) \left(\frac{L-x}{L} \right) \tau(x) dx = 0, \\ 1 \cdot \theta_{ji} &= \int_0^L \frac{M(x)M_j^*(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^L M(x) \left(-\frac{x}{L} \right) \tau(x) dx = 0,\end{aligned}\quad [3]$$

siendo $\tau(x) = \frac{I_0}{I(x)}$ la ley de variación de la inercia de la pieza, I_0 el valor mínimo de la inercia e $I(x)$ el valor de la inercia en el punto de abscisa x . Dado que la integral $\int_0^L M(x) \left(-\frac{x}{L}\right) \tau(x) dx$ es cero, y eliminando los términos constantes, las ecuaciones [3] se pueden poner en la forma

$$\int_0^L M(x) \tau(x) dx = 0, \quad \int_0^L M(x) x \tau(x) dx = 0. \quad [4]$$

Sustituyendo en las ecuaciones [8] la expresión del momento flector $M(x)$ de la ecuación [8], y sacando fuera de las integrales los términos constantes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^L M_i(x) \tau(x) dx + \frac{M_{ij}^e}{L} \int_0^L (L-x) \tau(x) dx - \frac{M_{ji}^e}{L} \int_0^L x \tau(x) dx &= 0, \\ \int_0^L M_i(x) x \tau(x) dx + \frac{M_{ij}^e}{L} \int_0^L (L-x) x \tau(x) dx - \frac{M_{ji}^e}{L} \int_0^L x^2 \tau(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= - \frac{\int_0^L M_i(x) x \tau(x) dx \int_0^L x \tau(x) dx - \int_0^L M_i(x) \tau(x) dx \int_0^L x^2 \tau(x) dx}{\int_0^L x \tau(x) dx \int_0^L (L-x) x \tau(x) dx - \int_0^L (L-x) \tau(x) dx \int_0^L x^2 \tau(x) dx} L, \\ M_{ji}^e &= \frac{\int_0^L M_i(x) \tau(x) dx \int_0^L (L-x) x \tau(x) dx - \int_0^L M_i(x) x \tau(x) dx \int_0^L (L-x) \tau(x) dx}{\int_0^L x \tau(x) dx \int_0^L (L-x) x \tau(x) dx - \int_0^L (L-x) \tau(x) dx \int_0^L x^2 \tau(x) dx} L. \end{aligned}$$

1.2. Pieza empotrada en un extremo y articulada en el otro

Sea la pieza ij de la figura 4, articulada en el extremo i y empotrada en el extremo j . La ley de momentos flectores, debida a la carga aplicada y al momento de empotramiento, es

$$M(x) = M_i(x) - \frac{M_{ji}^{e'}}{L} x.$$

Aplicando el TFV en el extremo j de la pieza

$$1 \cdot \theta_{ji} = \int_0^L \frac{M(x) M_j^*(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^L \left[M_i(x) - \frac{M_{ji}^{e'}}{L} x \right] \left(-\frac{x}{L} \right) \tau(x) dx = 0$$

y despejando $M_{ji}^{e'}$

$$M_{ji}^{e'} = \frac{\int_0^L M_i(x) x \tau(x) dx}{\int_0^L x^2 \tau(x) dx} L. \quad [5]$$

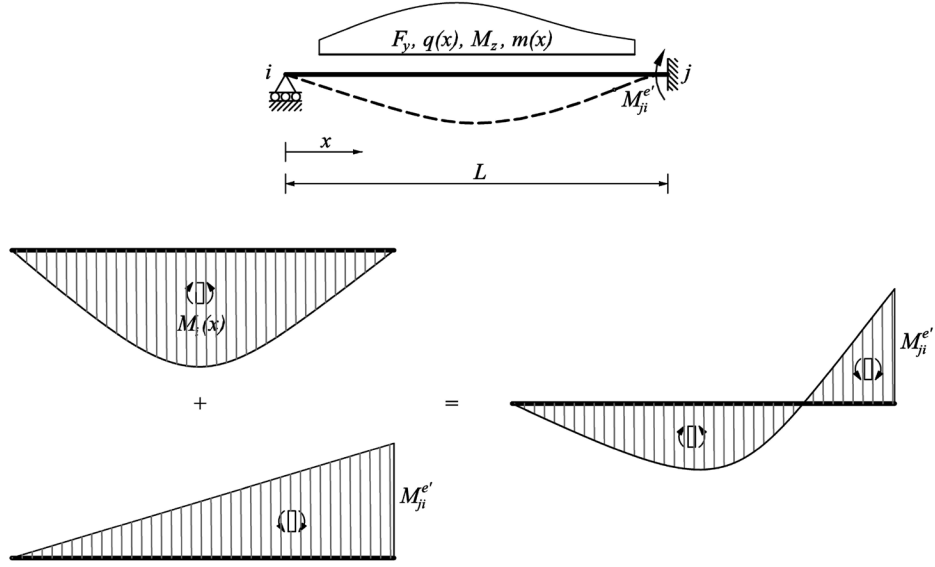


Figura 4. Pieza articulada-empotrada. Momentos de empotramiento perfecto.

Siguiendo el mismo procedimiento de la pieza articulada-empotrada, se resuelve el caso de una pieza empotrada en el extremo i y articulada en el extremo j . La ley de momentos flectores es

$$M(x) = M_i(x) + M_{ij}^{e'} - \frac{M_{ij}^{e'}}{L}x = M_i(x) + \frac{M_{ij}^{e'}}{L}(L-x).$$

Aplicando el TFCV en el extremo i de la pieza se obtiene

$$1 \cdot \theta_{ij} = \int_0^L \frac{M(x)M_i^*(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^L M(x) \left(\frac{L-x}{L} \right) \tau(x) dx = 0.$$

Sustituyendo la ley de momentos flectores $M(x)$, y eliminando los términos constantes, se obtiene

$$\int_0^L M_i(x) \tau(x) (L-x) dx + \frac{M_{ij}^{e'}}{L} \int_0^L (L-x)^2 \tau(x) dx = 0$$

y, despejando $M_{ij}^{e'}$, se obtiene

$$M_{ij}^{e'} = - \frac{\int_0^L M_i(x) (L-x) \tau(x) dx}{\int_0^L (L-x)^2 \tau(x) dx} L. \quad [6]$$

Para piezas de inercia constante, $\tau(x) = 1$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones [5] y [6] se obtiene

$$M_{ji}^{e'} = \frac{\int_0^L M_i(x) x dx}{\int_i^j x^2 dx} L = \frac{\int_0^L M_i(x) x dx}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L} L = \frac{3 \int_0^L M_i(x) x dx}{L^2},$$

$$M_{ij}^{e'} = - \frac{\int_0^L M_i(L-x) x dx}{\int_i^j (L-x)^2 dx} L = - \frac{\int_0^L M_i(x) x dx}{\left[\frac{(L-x)^3}{3} \right]_0^L} L = - \frac{3 \int_0^L M_i(x) (L-x) dx}{L^2}.$$

2. Factores de transmisión

Sea la pieza ij de la figura 5, articulada en el extremo i y empotrada en el extremo j , a la que se le aplica un momento m_i en el extremo i . Se define el factor de transmisión (β_{ij}) del extremo i al extremo j de la pieza, como el cociente entre el momento que se produce en el extremo j (M_{ji}) y el momento (m_i) aplicado en el extremo i .

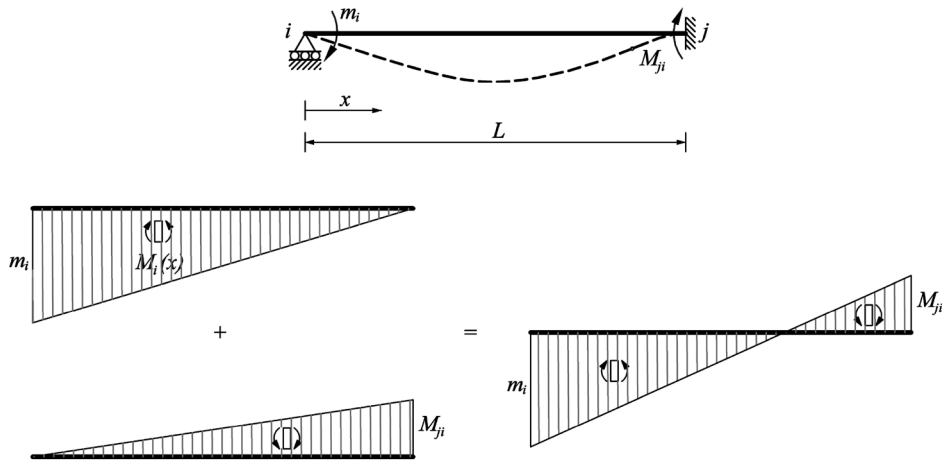


Figura 5. Pieza articulada-empotrada. Diagramas de momentos.

La ley de momentos flectores para las cargas exteriores (momento m_i) es

$$M_i(x) = m_i - \frac{m_i}{L} x = \frac{m_i}{L} (L - x).$$

Sustituyendo la expresión de $M_i(x)$ en la expresión del momento de empotramiento perfecto de una pieza articulada-empotrada (ecuación [5]), se obtiene

$$\beta_{ij} = \frac{M_{ji}}{m_i} = \frac{1}{m_i} \frac{\int_0^L \frac{m_i}{L} (L-x) \tau(x) x dx}{\int_0^L x^2 \tau(x) dx} L = \frac{\int_0^L (L-x) \tau(x) x dx}{\int_0^L x^2 \tau(x) dx}.$$

Operando de la misma forma para el extremo j se obtiene

$$\beta_{ji} = \frac{M_{ij}}{m_j} = -\frac{1}{m_j} \frac{\int_0^L \frac{m_i}{L} (L-x)(L-x)\tau(x)dx}{\int_0^L (L-x)^2 \tau(x)dx} L = \frac{\int_0^L (L-x)\tau(x)xdx}{\int_0^L (L-x)^2 \tau(x)dx}.$$

Para piezas de inercia constante $\tau(x)=1$. Sustituyendo este valor en la expresión de β_{ij} se obtiene

$$\beta_{ij} = \frac{\int_0^L (L-x)xdx}{\int_0^L x^2 dx} = \frac{\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^L}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L} = \frac{1}{2}.$$

De la misma forma se puede obtener el valor de β_{ji} ; ahora bien, debido a la simetría de la pieza

$$\beta_{ji} = \beta_{ij} = \frac{1}{2}.$$

3. Rigideces al giro

3.1. Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo empotrado

Sea la pieza ij de la figura 6, articulada en el extremo i y empotrada en el extremo j , a la que se le aplica un momento m_i en el extremo i . Se define la rigidez al giro en el extremo i de la pieza (k_{ij}) al cociente entre el momento aplicado en el extremo i y el giro que se produce en ese mismo extremo.

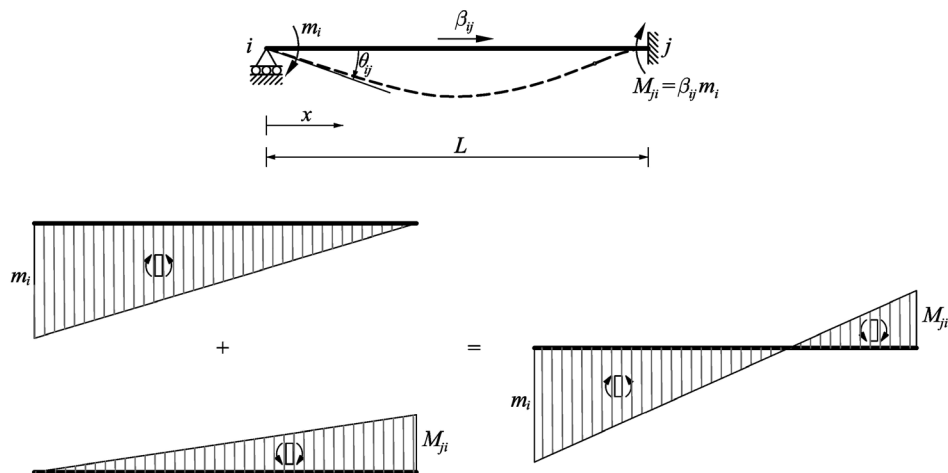


Figura 6. Pieza articulada-empotrada.
Diagramas de momentos para el cálculo de la rigidez al giro en el extremo i .

Al aplicar el momento m_i en el extremo i , en el extremo j aparece un momento de empotramiento (M_{ji}) que es igual al momento aplicado multiplicado por el factor de transmisión del extremo i al j ($M_{ji} = \beta_{ij} m_i$). La ley de momentos flectores es

$$M(x) = m_i - \frac{(m_i + M_{ji})}{L} x = \frac{m_i}{L} (L - x) - \frac{M_{ji}}{L} x = \frac{m_i}{L} [(L - x) - \beta_{ij} x].$$

Aplicando el TFFV, el ángulo girado en el extremo i es

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \int_0^L \frac{M(x) M_i^*(x)}{EI(x)} dx = \int_0^L \frac{M(x) \left(\frac{L-x}{L}\right)}{EI(x)} dx = \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} dx + \int_0^L \frac{M(x) \left(-\frac{x}{L}\right)}{EI(x)} dx \\ &= \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)} dx = m_i \frac{\int_0^L (L-x) \tau(x) dx - \beta_{ij} \int_0^L x \tau(x) dx}{EI_0 L}, \end{aligned}$$

ya que la integral $\int_0^L \frac{M(x) \left(-\frac{x}{L}\right)}{EI(x)} dx$ es cero, debido a que el giro en el extremo j es cero.

De acuerdo con la definición de rigidez al giro

$$k_{ij} = \frac{m_i}{\theta_{ij}} = \frac{EI_0 L}{\int_0^L (L-x) \tau(x) dx - \beta_{ij} \int_0^L x \tau(x) dx}.$$

Operando de la misma forma, la rigidez al giro en el extremo j , cuando el extremo i está empotrado, viene dada por

$$k_{ji} = \frac{m_j}{\theta_{ji}} = \frac{EI_0 L}{\int_0^L x \tau(x) dx - \beta_{ji} \int_0^L (L-x) \tau(x) dx}.$$

Para piezas de inercia constante, $\tau(x) = 1$, $\beta_{ij} = \beta_{ji} = 0,5$. Sustituyendo estos valores en la expresión de k_{ij} se obtiene

$$k_{ij} = \frac{EI_0 L}{\left[Lx - \frac{x^2}{2}\right]_0^L - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L} = \frac{4EI_0}{L}.$$

De la misma forma se puede obtener la expresión de k_{ji} ; ahora bien, debido a la simetría de la pieza $k_{ji} = k_{ij}$.

3.2. Rigidez al giro en un extremo con el otro extremo articulado

Sea la pieza ij de la figura 7a, con los dos extremos articulados, a la que se le aplica un momento m_i en el extremo i .

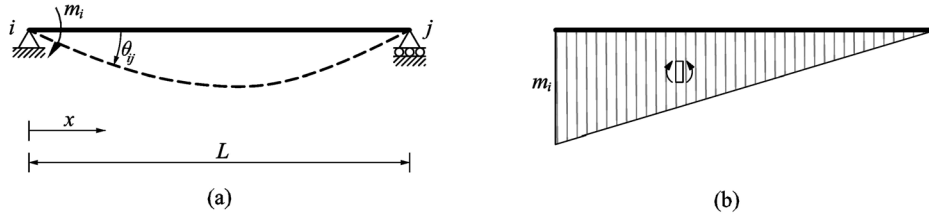


Figura 7. a) Pieza articulada-articulada, b) diagrama de momentos debido al momento m_i .

La ley de momentos flectores (figura 7b) es

$$M(x) = m_i - \frac{m_i}{L}x = \frac{m_i}{L}(L-x).$$

Aplicando el TFCV en el extremo i

$$1 \cdot \theta_{ij} = \int_0^L \frac{M(x)M_i^*(x)}{EI(x)} dx = \int_0^L \frac{\frac{m_i}{L}(L-x)}{EI(x)} dx = m_i \frac{\int_0^L (L-x) \tau(x) dx}{EI_0 L^2}$$

y, de acuerdo con la definición de rigidez al giro, se obtiene

$$k'_{ij} = \frac{m_i}{\theta_{ij}} = \frac{EI_0 L^2}{\int_0^L (L-x)^2 \tau(x) dx}.$$

Operando de la misma forma se obtiene la rigidez al giro en el extremo j

$$k'_{ji} = \frac{m_j}{\theta_{ji}} = \frac{EI_0 L^2}{\int_0^L x^2 \tau(x) dx}.$$

Para piezas de inercia constante $\tau(x)=1$, y sustituyendo este valor en la expresión de k'_{ij} se tiene

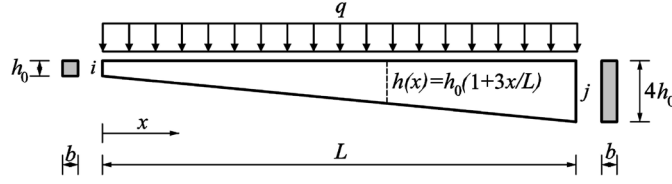
$$k'_{ij} = \frac{EI_0 L^2}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L} = \frac{3EI_0}{L}.$$

Debido a la simetría de la pieza, la rigidez al giro en el extremo j es $k'_{ji} = k'_{ij}$.

EJEMPLO 1

Pieza de canto variable

Calcular los momentos de empotramiento perfecto, los factores de transmisión y las rigideces al giro de la pieza de canto variable (linealmente) de la figura.



La ley de variación de la inercia de la pieza es

$$\tau(x) = \frac{I_0}{I(x)} = \frac{\frac{1}{12}bh_0^3}{\frac{1}{12}bh^3(x)} = \frac{h_0^3}{\left[h_0\left(1 + 3\frac{x}{L}\right)\right]^3} = \frac{1}{\left(1 + 3\frac{x}{L}\right)^3}.$$

1. Momentos de empotramiento perfecto

Las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto son

$$M_{ij}^e = -\frac{\int_0^L M_i(x)x\tau(x)dx \int_0^L x\tau(x)dx - \int_0^L M_i(x)\tau(x)dx \int_0^L x^2\tau(x)dx}{\int_0^L x\tau(x)dx \int_0^L (L-x)x\tau(x)dx - \int_0^L (L-x)\tau(x)dx \int_0^L x^2\tau(x)dx} L,$$

$$M_{ji}^e = \frac{\int_0^L M_i(x)\tau(x)dx \int_0^L (L-x)x\tau(x)dx - \int_0^L M_i(x)x\tau(x)dx \int_0^L (L-x)\tau(x)dx}{\int_0^L x\tau(x)dx \int_0^L (L-x)x\tau(x)dx - \int_0^L (L-x)\tau(x)dx \int_0^L x^2\tau(x)dx} L.$$

La ley de momentos flectores de la carga aplicada es $M_i(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$. Resolviendo las integrales que intervienen en las expresiones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^L x\tau(x)dx &= \frac{L^2}{32} = 0,031250L^2, \\ \int_0^L x^2\tau(x)dx &= (64\ln(2) - 33)\frac{L^3}{864} = 0,013150L^3, \\ \int_0^L (L-x)\tau(x)dx &= \frac{L^2}{8} = 0,125000L^2, \\ \int_0^L (L-x)x\tau(x)dx &= -(16\ln(2) - 15)\frac{L^3}{216} = 0,018100L^3, \\ \int_0^L M_i(x)\tau(x)dx &= -(16\ln(2) - 15)\frac{qL^3}{432} = 0,009050qL^3, \\ \int_0^L M_i(x)x\tau(x)dx &= (32\ln(2) - 21)\frac{qL^4}{432} = 0,002733qL^4.\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las integrales en las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto se obtiene

$$M_{ij}^e = -\frac{0,002733qL^4 \cdot 0,031250L^2 - 0,009050qL^3 \cdot 0,013150L^3}{0,031250L^2 \cdot 0,018100L^3 - 0,125000L^2 \cdot 0,013150L^3} L = -0,031170qL^2 = -\frac{qL^2}{32,082},$$

$$M_{ji}^e = \frac{0,009050qL^3 \cdot 0,018100L^3 - 0,002733qL^4 \cdot 0,125000L^2}{0,031250L^2 \cdot 0,018100L^3 - 0,125000L^2 \cdot 0,013150L^3} L = 0,164951qL^2 = \frac{qL^2}{6,062}.$$

Para piezas de inercia constante $\tau(x)=1$, y los momentos de empotramiento perfecto son

$$M_{ij}^e = -\frac{qL^2}{12}, \quad M_{ji}^e = \frac{qL^2}{12}.$$

Con relación a los momentos de empotramiento perfecto de la pieza de inercia constante, los momentos de empotramiento perfecto aumentan en el extremo de mayor momento de inercia y disminuyen en el extremo de menor momento de inercia.

2. Factores de transmisión

Las expresiones de los factores de transmisión son

$$\beta_{ij} = \frac{\int_0^L (L-x)\tau(x)xdx}{\int_0^L x^2\tau(x)dx}, \quad \beta_{ji} = \frac{\int_0^L (L-x)\tau(x)xdx}{\int_0^L (L-x)^2\tau(x)dx}.$$

El valor de la integral del denominador de la expresión del factor de transmisión β_{ji} es $\int_0^L (L-x)^2\tau(x)dx = 0,106900L^3$. Sustituyendo los valores de las integrales se obtiene

$$\beta_{ij} = \frac{0,018100L^3}{0,0131500L^3} = 1,3764, \quad \beta_{ji} = \frac{0,018100L^3}{0,106900L^3} = 0,1693.$$

Como puede observarse, los factores de transmisión del extremo de menor inercia al de mayor inercia aumentan respecto del valor $\frac{1}{2}$ correspondiente a la pieza de inercia constante.

3. Rigideces al giro

Sustituyendo los valores de las integrales y de los factores de transmisión se obtiene

$$k_{ij} = \frac{EI_0L}{\int_0^L (L-x)\tau(x)dx - \beta_{ij}\int_0^L x\tau(x)dx} = \frac{EI_0L}{\frac{L^2}{8} - 1,3764\frac{L^2}{32}} = 12,1970\frac{EI_0}{L},$$

$$k_{ji} = \frac{EI_0L}{\int_0^L x\tau(x)dx - \beta_{ji}\int_0^L (L-x)\tau(x)dx} = \frac{EI_0L}{\frac{L^2}{32} - 0,1693\frac{L^2}{8}} = 99,1326\frac{EI_0}{L}.$$

Como puede observarse, la rigidez al giro es muy superior en el extremo de mayor inercia. Si se toman como referencia las rigideces al giro de una viga del mismo volumen y de canto constante ($h_m = 2,5h_0$), las rigideces obtenidas pueden ponerse en la forma

$$I_m = \frac{1}{12}bh_m^3 = \frac{1}{12}b(2,5h_0)^3 = 15,6250I_0,$$

$$k_{ij} = 12,1970\frac{EI_0}{L} = 0,7810\frac{EI_m}{L} = 0,1952\left(\frac{4EI_m}{L}\right),$$

$$k_{ji} = 99,1326\frac{EI_0}{L} = 6,3445\frac{EI_m}{L} = 1,5861\left(\frac{4EI_m}{L}\right).$$

4. Ecuaciones de comportamiento de la pieza recta

Estas ecuaciones relacionan los momentos en los extremos de la pieza con las cargas aplicadas sobre ella, los giros de la tangente a la elástica en cada extremo y el desplazamiento relativo (perpendicular al eje longitudinal inicial de la pieza) entre los extremos.

Sea el estado general de carga y deformación de la pieza de la figura 8. El criterio de signos que se va a emplear es el siguiente:

- momentos positivos si actúan en sentido horario;
- giros positivos si la tangente a la elástica en un extremo gira en sentido horario respecto a su posición inicial, y
- desplazamientos relativos positivos si suponen un giro horario de la pieza.

Para obtener las ecuaciones se calculan los momentos debidos a las cargas exteriores, a los giros en cada uno de los extremos y al desplazamiento relativo entre ellos. Superponiendo estos momentos, se obtiene la expresión general de las ecuaciones.

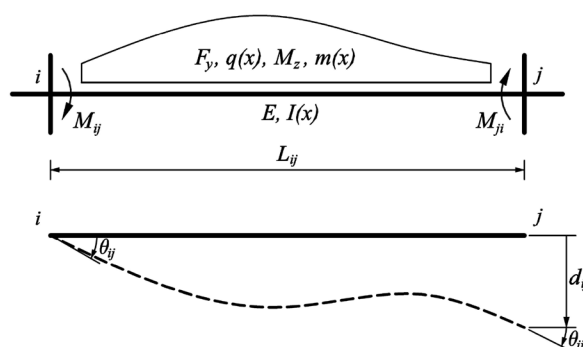


Figura 8. Pieza recta. Estado general de cargas y deformaciones.

4.1. Sin desplazamiento relativo entre los extremos de la pieza

Se considera en primer lugar que no hay desplazamiento relativo entre los extremos de la pieza ($d_{ij} = 0$), y el caso general de la figura 9a se resuelve por superposición de los tres casos de las figuras 9b a 9d.

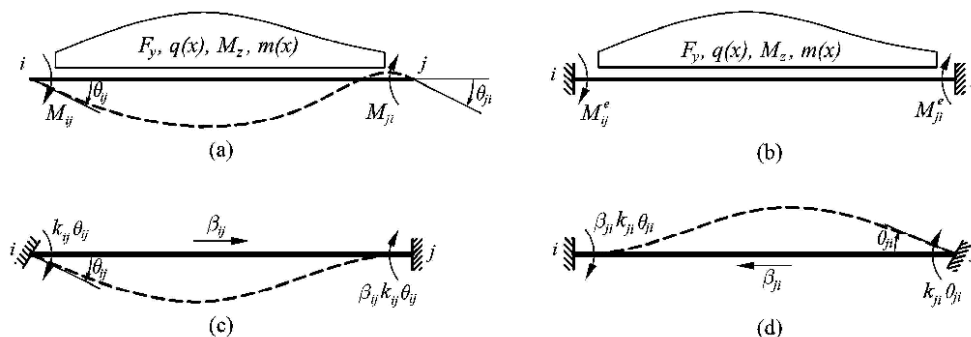


Figura 9. Pieza recta. Efectos de la carga exterior y de los giros en los extremos.

1. **Caso general.** Figura 9a. Hay cargas aplicadas $q(x), F_y, M_z, m(x)$ y giros en los extremos de la pieza θ_{ij}, θ_{ji} . Los momentos en los extremos son M_{ij}, M_{ji} .

2. **Cargas aplicadas.** Figura 9b. Hay cargas aplicadas ($q(x), F_y, M_z, m(x)$) y se impiden los giros en los extremos ($\theta_{ij}, \theta_{ji} = 0$). Los momentos en los extremos son los momentos de empotramiento perfecto (M_{ij}^e, M_{ji}^e) debidos a las cargas aplicadas.
3. **Giro en el extremo i .** Figura 9c. No hay cargas aplicadas, se impone un giro θ_{ij} en el extremo i y se impide el giro en el extremo j ($\theta_{ji} = 0$). En el extremo i el momento es $k_{ij}\theta_{ij}$, que es el momento necesario para producir el giro θ_{ij} . En el extremo j el momento es $\beta_{ij}k_{ij}\theta_{ij}$, que es el momento de transmisión de i a j .
4. **Giro en el extremo j .** Figura 9d. No hay cargas aplicadas, se impone un giro θ_{ji} en el extremo j y se impide el giro en el extremo i ($\theta_{ij} = 0$). En el extremo j el momento es $k_{ji}\theta_{ji}$, que es el momento necesario para producir el giro θ_{ji} . En el extremo i el momento es $\beta_{ji}k_{ji}\theta_{ji}$, que es el momento de transmisión de j a i .

Aplicando el principio de superposición a los casos 2 a 4, los momentos totales en los extremos de la pieza del caso general son

$$\begin{aligned} M_{ij} &= M_{ij}^e + k_{ij}\theta_{ij} + \beta_{ji}k_{ji}\theta_{ji}, \\ M_{ji} &= M_{ji}^e + k_{ji}\theta_{ji} + \beta_{ij}k_{ij}\theta_{ij}. \end{aligned} \quad [7]$$

El teorema de reciprocidad de Rayleigh-Betti dice: “En un cuerpo elástico lineal sometido a dos sistemas de fuerzas, el trabajo que realizaría el primer sistema de fuerzas al moverse a través de los desplazamientos producidos por el segundo sistema de fuerzas es igual al trabajo que produciría el segundo sistema de fuerzas al moverse a través de los desplazamientos producidos por el primer sistema de fuerzas”.

Aplicando el teorema de reciprocidad de Rayleigh-Betti a la pieza de la figura 10

$$k_{ij}\theta_{ij} \cdot 0 + \beta_{ij}k_{ij}\theta_{ij}\theta_{ji} = \beta_{ji}k_{ji}\theta_{ji}\theta_{ij} + k_{ji}\theta_{ji} \cdot 0 \Rightarrow \beta_{ij}k_{ij} = \beta_{ji}k_{ji}. \quad [8]$$

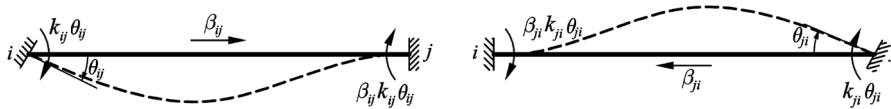


Figura 10. Aplicación del teorema de reciprocidad de Rayleigh-Betti.

Sustituyendo la ecuación [8] en las ecuaciones [7] se obtienen las ecuaciones de comportamiento cuando no hay desplazamiento relativo entre los extremos de la pieza

$$\begin{aligned} M_{ij} &= M_{ij}^e + k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji}), \\ M_{ji} &= M_{ji}^e + k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji}). \end{aligned} \quad [9]$$

4.2. Con desplazamiento relativo entre los extremos de la pieza

El caso más general, en el que se producen desplazamientos relativos entre los extremos de la pieza, se resuelve añadiendo, a los momentos de la solución anterior, los momentos pro-

ducidos por un desplazamiento relativo (sin giros) de los extremos de la pieza. El desplazamiento se produce en dos fases:

1. Rotación de la pieza como sólido rígido (sin deformación), hasta alcanzar el desplazamiento d_{ij} (figura 11a).
2. Aplicación de los momentos en los extremos necesarios para anular los giros producidos en la fase 1 (figura 11b).

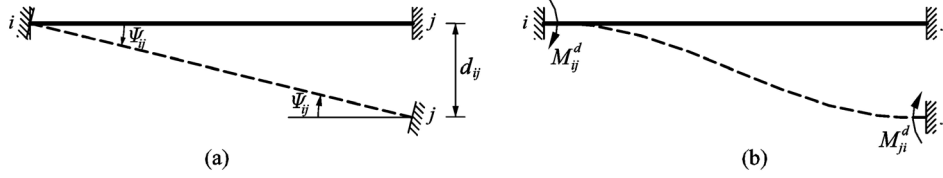


Figura 11. Momentos de empotramiento perfecto debidos al desplazamiento relativo.

Los giros producidos en la primera fase, teniendo en cuenta la hipótesis de pequeños desplazamientos, son

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} = \frac{d_{ij}}{L_{ij}}.$$

Aplicando las ecuaciones [9] se obtienen los momentos que hay que aplicar en los extremos para anular los giros:

$$\theta_{ij} = \theta_{ji} = -\psi_{ij} = -\psi_{ji} = -\frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

de la fase 1:

$$M_{ij}^d = k_{ij} \left(-\frac{d_{ij}}{L_{ij}} - \beta_{ij} \frac{d_{ij}}{L_{ij}} \right) = -k_{ij} (1 + \beta_{ij}) \frac{d_{ij}}{L_{ij}},$$

$$M_{ji}^d = k_{ji} \left(-\beta_{ji} \frac{d_{ij}}{L_{ij}} - \frac{d_{ij}}{L_{ij}} \right) = -k_{ji} (1 + \beta_{ji}) \frac{d_{ij}}{L_{ij}}.$$

Superponiendo estos momentos a los producidos por las cargas exteriores y los giros en los extremos, se obtienen las ecuaciones generales de la pieza recta

$$M_{ij} = M_{ij}^e + k_{ij} (\theta_{ij} + \beta_{ij} \theta_{ji}) - k_{ij} (1 + \beta_{ij}) \frac{d_{ij}}{L_{ij}},$$

$$M_{ji} = M_{ji}^e + k_{ji} (\beta_{ji} \theta_{ij} + \theta_{ji}) - k_{ji} (1 + \beta_{ji}) \frac{d_{ij}}{L_{ij}}. \quad [10]$$

En las piezas de inercia constante $k_{ij} = k_{ji} = \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}}$ y $\beta_{ij} = \beta_{ji} = 0,5$; por lo tanto, las ecuaciones de comportamiento de la pieza prismática recta son

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= M_{ij}^e + \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}} \left(\theta_{ij} + \frac{\theta_{ji}}{2} \right) - \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} d_{ij}, \\
M_{ji} &= M_{ji}^e + \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}} \left(\frac{\theta_{ij}}{2} + \theta_{ji} \right) - \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} d_{ij}.
\end{aligned}
\tag{11}$$

5. Ecuaciones de comportamiento de la pieza recta con un extremo articulado

Sea la pieza de la figura 12, rígidamente unida a un nudo en el extremo i y articulada a otro en el extremo j .

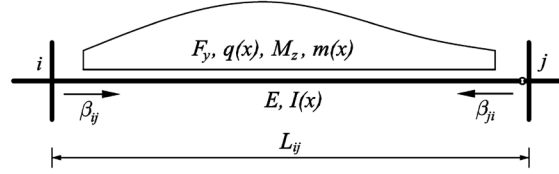


Figura 12. Pieza con el extremo j articulado.

Puesto que el extremo j está articulado, el momento es cero. Imponiendo esta condición en las ecuaciones [10] se obtiene

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= M_{ij}^e + k_{ij} \left(\theta_{ij} + \beta_{ij} \theta_{ji} \right) - k_{ij} \left(1 + \beta_{ij} \right) \frac{d_{ij}}{L_{ij}}, \\
0 &= M_{ji}^e + k_{ji} \left(\beta_{ji} \theta_{ij} + \theta_{ji} \right) - k_{ji} \left(1 + \beta_{ji} \right) \frac{d_{ij}}{L_{ij}}.
\end{aligned}
\tag{12}$$

Multiplicando la segunda de las ecuaciones [12] por β_{ji} , restándola de la primera, teniendo en cuenta que $\beta_{ij} k_{ij} = \beta_{ji} k_{ji}$, y reagrupando términos, se obtiene

$$M_{ij} = \left(M_{ij}^e - \beta_{ji} M_{ji}^e \right) + k_{ij} \left(1 - \beta_{ij} \beta_{ji} \right) \theta_{ij} - k_{ij} \left(1 - \beta_{ij} \beta_{ji} \right) \frac{d_{ij}}{L_{ij}}.
\tag{13}$$

Así pues, se pueden plantear las ecuaciones de comportamiento de una pieza con un extremo articulado empleando unos momentos de empotramiento perfecto virtuales ($M_{ij}^{e'}$) y unas rigideces virtuales (k_{ij}'), para el extremo rígido, dadas por

$$M_{ij}^{e'} = M_{ij}^e - \beta_{ji} M_{ji}^e, \quad k_{ij}' = k_{ij} \left(1 - \beta_{ij} \beta_{ji} \right),$$

con lo que la ecuación [13] queda en la forma

$$M_{ij} = M_{ij}^{e'} + k_{ij}' \theta_{ij} - k_{ij}' \frac{d_{ij}}{L_{ij}}$$

Para piezas de inercia constante,

$$M_{ij} = M_{ij}^e + \frac{3EI_{ij}}{L_{ij}}\theta_{ij} - \frac{3EI_{ij}}{L_{ij}^2}d_{ij}.$$

6. Aplicación de las ecuaciones de comportamiento de la pieza recta

Las ecuaciones [10] y [11] relacionan los momentos flectores, en dos puntos i y j cualesquiera, con las cargas aplicadas, con los giros de puntos del eje de la pieza y con el desplazamiento relativo, perpendicular a la directriz, entre ellos.

Conocida la geometría, las propiedades y las cargas exteriores aplicadas sobre la pieza, las ecuaciones [10] y [11] tienen cinco variables $(M_{ij}, M_{ji}, \theta_{ij}, \theta_{ji}, d_{ij})$; así pues, conocidas tres de estas variables se pueden obtener las otras dos.

En una pieza de inercia constante, en la que se conozcan los momentos en dos puntos i y j , y el giro en el punto i $(M_{ij}, M_{ji}, \theta_{ij})$, las ecuaciones [11] proporcionan las expresiones del giro en el punto j y del desplazamiento relativo entre dos puntos (θ_{ji}, d_{ij})

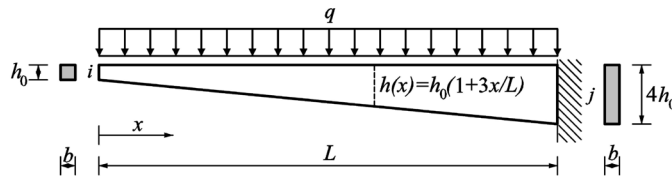
$$d_{ij} = \theta_{ij}L_{ij} - \frac{(M_{ij} - M_{ij}^e) - 0,5(M_{ji} - M_{ji}^e)}{\frac{3EI_{ij}}{L_{ij}^2}},$$

$$\theta_{ji} = \theta_{ij} - \frac{(M_{ij} - M_{ij}^e) - 0,5(M_{ji} - M_{ji}^e)}{\frac{2EI_{ij}}{L_{ij}}}.$$

EJEMPLO 2

Desplazamiento en el extremo libre de una pieza de canto variable en voladizo

Calcular el desplazamiento vertical del extremo libre de la viga en voladizo de la figura y compararlo con el de una viga de sección constante del mismo volumen.



Las ecuaciones de comportamiento para una pieza de inercia variable son

$$M_{ij} = M_{ij}^e + k_{ij}(\theta_{ij} + \beta_{ij}\theta_{ji}) - k_{ij}(1 + \beta_{ij})\frac{d_{ij}}{L_{ij}},$$

$$M_{ji} = M_{ji}^e + k_{ji}(\beta_{ji}\theta_{ij} + \theta_{ji}) - k_{ji}(1 + \beta_{ji})\frac{d_{ij}}{L_{ij}}.$$

Sustituyendo las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto, las rigideces al giro y los factores de transmisión, obtenidas en el ejemplo 1, y las condiciones en los extremos del voladizo

$$M_{ij} = 0, M_{ji} = \frac{qL^2}{2}, \theta_{ji} = 0,$$

las ecuaciones quedan en la forma

$$0 = -\frac{qL^2}{32,082} + 12,1970 \frac{EI_0}{L} \theta_{ij} - 12,1970 \frac{EI_0}{L} (1 + 1,3764) \frac{d_{ij}}{L},$$

$$\frac{qL^2}{2} = \frac{qL^2}{6,062} + 99,1326 \frac{EI_0}{L} 0,1693 \theta_{ij} - 99,1326 \frac{EI_0}{L} (1 + 0,1693) \frac{d_{ij}}{L}.$$

Multiplicando la primera ecuación por $99,1326 \cdot 0,1693 / 12,1970$ y restándola de la segunda se tiene

$$0,207936qL^2 - 75,954627 \frac{EI_0}{L^2} d_{ij} = \frac{qL^2}{2} \Rightarrow d_{ij} = -\frac{qL^4}{260,2529EI_0} = -\frac{qL^4}{16,6439EI_m}.$$

Las ecuaciones de comportamiento de la pieza recta de inercia constante son

$$M_{ij} = M_{ij}^e + \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}} \left(\theta_{ij} + \frac{\theta_{ji}}{2} \right) - \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} d_{ij},$$

$$M_{ji} = M_{ji}^e + \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}} \left(\frac{\theta_{ij}}{2} + \theta_{ji} \right) - \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} d_{ij}.$$

Sustituyendo las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto, rigideces al giro y factores de transmisión de la pieza de sección constante e igual volumen, junto con las condiciones en los extremos del voladizo

$$M_{ij} = 0, M_{ji} = \frac{qL^2}{2}, \theta_{ji} = 0,$$

las ecuaciones quedan en la forma

$$0 = -\frac{qL^2}{12} + \frac{4EI_m}{L} \theta_{ij} - \frac{6EI_m}{L_{ij}^2} d_{ij},$$

$$\frac{qL^2}{2} = \frac{qL^2}{12} + \frac{2EI_m}{L_{ij}} \theta_{ij} - \frac{6EI_m}{L_{ij}^2} d_{ij}.$$

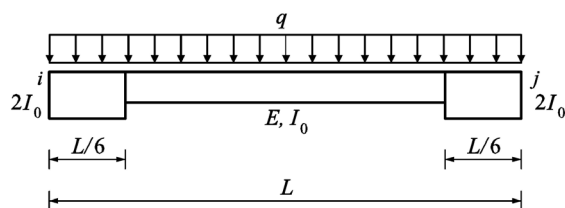
Multiplicando la primera ecuación por $\frac{1}{2}$ y restándola de la segunda se obtiene

$$\frac{qL^2}{2} = \frac{qL^2}{8} - \frac{3EI_m}{L^2} d_{ij} \Rightarrow d_{ij} = -\frac{qL^4}{8EI_m}.$$

Como puede observarse, el desplazamiento de la viga de canto variable es un 52 % inferior al desplazamiento de la viga de canto constante de igual volumen.

Problemas propuestos

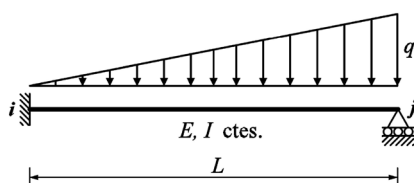
1. Para la pieza recta de sección variable de la figura, calcular: 1) los momentos de empotramiento perfecto; 2) los factores de transmisión de momentos, y 3) las rigideces al giro.



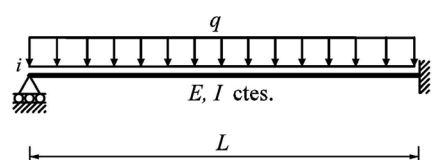
2. Utilizando las ecuaciones de comportamiento de la pieza prismática recta, y sabiendo que los momentos de empotramiento perfecto de una pieza empotrada-empotrada con carga triangular creciente son

$$M_{ij}^e = -\frac{qL^2}{30}, M_{ji}^e = \frac{qL^2}{20},$$

obtener la expresión del momento de empotramiento perfecto en el extremo i .

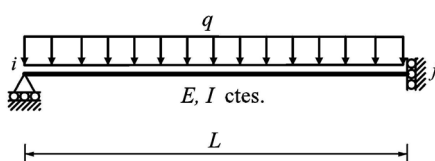


Problema 2

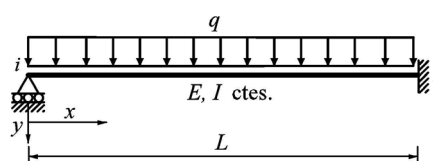


Problema 3

3. Para la viga de la figura, utilizando las ecuaciones de comportamiento de la pieza prismática recta, calcular: 1) el giro en el extremo i , y 2) el momento en el extremo j .
4. Para la viga de la figura, utilizando las ecuaciones de comportamiento de la pieza prismática recta, calcular: 1) el giro en el extremo i ; 2) el desplazamiento vertical en el extremo j , y 3) el momento flector en el extremo j .



Problema 4



Problema 5

5. Para la pieza de la figura, utilizando las ecuaciones de comportamiento de la pieza prismática recta, calcular: 1) la ecuación de la deformada; 2) el valor máximo del desplazamiento y el punto en el que se produce, y 3) el desplazamiento en el centro de la viga.